
VITTORIO EM. III


ZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine



MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES.

MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES,

AVEC LE RAPPORT APPROBATIF

Fait à l'Académie des Sciences sur la 2.me partie;

Par M. BÉRARD, professeur de mathématiques, membre de plusieurs Sociétés savantes.

A NISMES,

De l'Imprimerie des *ANNALES DE MATHÉMATIQUES*,
Chez DURAND-BELLE.

1818.

AVERTISSEMENT.

Les progrès de l'analise et, par suite, des sciences exactes, tiennent, comme on sait, à trois difficultés principales qui doivent réunir les efforts des géomètres ; savoir : l'élimination, la résolution des équations et l'intégration.

On n'a rien ajouté d'essentiel, que je sache, aux travaux de *Bezout*, sur l'élimination, et il ne s'en agira pas dans cet ouvrage.

La résolution des équations se subdivise en celle des équations littérales et celle des équations numériques. Les promesses, si souvent faites à l'égard des premières, se sont toujours évanouies. A l'égard des secondes, beaucoup de géomètres ont donné des méthodes : on en trouvera l'histoire dans le Chapitre I ci-après : aucune ne réunit assez les conditions d'une bonne méthode, simplicité, brièveté, sureté, exactitude, pour mériter de devenir usuelle.

Le champ est donc encore ouvert sur cet objet : je propose une nouvelle méthode analitique dans le Chapitre III, et plusieurs graphiques dans les Chapitres IV, et V : c'est aux géomètres qu'il appartient de les juger.

Dans le Chapitre VI, j'expose un théorème nouveau qui fournit une règle fort simple pour assigner le nombre

des racines imaginaires d'une équation proposée quelconque : MM. *Lagrange* et *Cauchy* avaient donné de ce problème, des solutions à peu près impraticables pour les degrés un peu élevés : mon théorème est, si je ne me trompe, un pas de plus en algèbre : j'en ai déduit, dans le Chapitre VII, une seconde règle pour distinguer, parmi les racines réelles, les nombres respectifs des positives et des négatives, problème qui est lié au précédent.

Quant au troisième problème dont j'ai parlé, celui de l'intégration, il se subdivise aussi en deux, celui qui concerne les fonctions différentielles d'une seule variable, et celui qui est relatif aux équations différentielles : il ne s'agit point ici du dernier.

En janvier 1817, j'avais présenté à l'académie des sciences une méthode nouvelle pour intégrer par approximation, entre des limites données, les fonctions d'une seule variable : cette compagnie illustre ayant jugé cette méthode préférable à toutes celles connues, et en ayant voté la publicité, je l'ai exposée dans le Chapitre VIII.

Le Chapitre IX est une extension nouvelle de ma méthode à la cubature des solides, et à la quadrature de leur surface : cette extension s'applique à toutes les intégrales appelées doubles, triples, et complète ce sujet.

Enfin, dans le Chapitre X, je donne une théorie nouvelle et plus rigoureuse du tonneau considéré comme composé de douves élastiques : ce sujet offre plusieurs problèmes à la fois piquans pour le géomètre, et utiles à la pratique de l'art.

TABLE SOMMAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

Notice historique des travaux faits pour découvrir les racines des équations.

CHAPITRE II.

Notions préliminaires.

CHAPITRE III.

Méthode nouvelle pour déterminer les racines réelles incommensurables.

CHAPITRE IV.

Méthodes analitiques et graphiques, particulières aux 3.me, 4.me et 5.me degrés.

CHAPITRE V.

Méthodes mécaniques pour trouver les racines.

CHAPITRE VI.

Détermination du nombre des racines imaginaires, d'une équation d'un degré quelconque.

CHAPITRE VII.

Distinction des racines réelles en positives et négatives.

CHAPITRE VIII.

Méthode nouvelle pour quarrer les courbes.

CHAPITRE IX.

Cubature des solides et quadrature de leur surface.

CHAPITRE X.

Du tonneau élastique ou théorie nouvelle et plus rigoureuse du jaugeage.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

PAGE 29, ligne 13, au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}]$, *lisez* : $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}]$.
Page 30, ligne 10, au lieu de $x'=\mp\frac{1}{3}\sqrt{p}]$, *lisez* : $x'=\mp\frac{2}{3}\sqrt{p}]$.
Page 32, ligne 20, au lieu de $x+lz$, *lisez* : $x=lz$.
Page 40, ligne 18, au lieu de $\frac{1}{2}\sqrt[2]{q}]$, *lisez* : $\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}]$.
Page 41, ligno 1, au lieu de $-\sqrt{\frac{-p}{2}}$, *lisez* : $-\sqrt{\frac{-p}{2}}$.
Page 42, ligne 14, au lieu de $C=-\frac{r^2}{2q\sqrt{\pm p}]}$, *lisez* : $C=-\frac{r}{2q\sqrt{\pm p}}$.
Page 49, ligne 26, au lieu de $+x$ et $-x$, *lisez* : $+x$ en $-x$.
Page 59, ligne 15, au lieu de $+(.....)x25(.....)$, *lisez* : $+(.....)x+25(....)$.
Page 60, ligne 6, au lieu de $+El$, *lisez* : $-El$.
ligne 13, au lieu de $+(.....)+x36(....$, *lisez* : $+(.....)x+36(....$
ligne 16, au lieu de $+(216f216y....)$, *lisez* : $+(216f-216y....)$.
Page 70, ligne dernière, au lieu de | 4 | 6 | 0 | 0 | |, *lisez* : | 4 | 6 | 2 | 0 | |.
Page 73, ligne 1, au lieu de $-128b^3d(z.....$, *lisez* : $-128b^3d)z....$
ligne 1, au lieu de $+a^3c^2(....$, *lisez* : $+2a^3c^2(.....$
ligne 16, au lieu de $+x_3+y_3$, *lisez* : $+x_3-y_3$.
Page 81, ligne 10, au lieu de 206, *lisez* : 216.
Page 86, ligne 13, au lieu de $x=2+\frac{1}{24}$, *lisez* : $x=1+\frac{1}{24}$.
Page 87, ligne 21, au lieu de $x=\frac{3}{24}$, $x=\frac{3}{24}$, *lisez* : $x=\frac{1}{24}$, $x=\frac{9}{24}$.
Page 92, ligne 19, au lieu de $\frac{n}{2}$, *lisez* : $\frac{n}{2}+1$.
Page 96, ligne 13, au lieu de représentant y_0, *lisez* : représentant par y_0.
Page 107, ligne 21, au lieu de ${}^2z_2=\frac{1}{4}$, *lisez* : ${}^2z_2=\frac{1}{2}$.
Page 108, ligne 10, au lieu de ou $a=1$, *lisez* : ou $a=1$.
Page 115, ligne 15, au lieu de l^2x^2, *lisez* : l^2x.
Page 116, ligne 17, au lieu de le, *lisez* : se.
ligne 19, au lieu de $1,5768.x$, *lisez* : $1,5708.x$.
Page 122, ligne 12, au lieu de $+e\sqrt{.....}$, *lisez* : $+r\sqrt{.....}$.
Page 125, ligne 3, au lieu de y'^2R^2, *lisez* : $y'^2=R^2$.
Page 127, ligne 7, au lieu de $n''d)^2$, *lisez* : $n''d^2)$.
Page 129, ligne 21, au lieu de $0,7754.L$, *lisez* : $0,7854L$.

MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTICE HISTORIQUE DES TRAVAUX FAITS POUR DÉCOUVRIR LES RACINES DES ÉQUATIONS.

1. L'ART de découvrir les racines des équations numériques, est un des problèmes les plus importans, puisque, en dernière analise, toutes les questions aboutissent à celle-là. Tous les calculs qu'on a faits, dit l'illustre *Lagrange*, sont en pure perte, si l'on n'a pas les moyens de résoudre ces équations. Dès le 3.me degré, l'expression algébrique des racines est insuffisante pour faire connaître, dans tous les cas, leur valeur numérique, et, à plus forte raison, il en serait de même pour les degrés supérieurs, si on parvenait enfin à découvrir l'expression générale des racines; il faudrait toujours recourir à d'autres moyens, pour trouver les valeurs numériques des racines d'une équation proposée (*Séances des écoles normales*, tom. 3, pag. 463, 476).

2. L'importance du problème des racines a été sentie par les plus grands géomètres, et il n'en est presque aucun qui n'ait cherché une méthode simple, directe et sûre pour les découvrir. Il m'a paru nécessaire de rapporter une esquisse des travaux entrepris sur cette matière; tant pour mieux faire sentir les points de la difficulté, que pour signaler les écueils des routes qui ont été suivies : ce précis sera extrait, en partie, des ouvrages de *Lagrange*.

3. *Viète*, qui le premier s'occupa du sujet dont il s'agit, employa une méthode analogue à celle de l'extraction des racines des nombres; *Harriot*, *Ougtred*, etc., cherchèrent à la simplifier; « mais la » multitude des opérations qu'elle demande, et l'incertitude du succès » dans un grand nombre de cas, l'ont fait abandonner entièrement » avant la fin du 17.me siècle ». (*De la résolution des équations numériques*, par M. *Lagrange*, pag. 1.)

4. La méthode de *Viète* a fait place à celle de *Newton*, qui n'est, au fond, qu'un procédé d'approximation, puisqu'il faut déjà connaître une valeur de la racine, à moins de $\frac{1}{10}$ près. « Elle ne » sert, comme on voit, que pour les équations numériques qui sont » déjà à peu près résolues; de plus, elle n'est pas toujours sûre : » elle a encore l'inconvénient de ne donner que des valeurs appro- » chées des racines mêmes qui peuvent être exprimées exactement » en nombres, et de laisser en doute si elles sont commensurables » ou non ». (*De la résolution des équations numériques*, pag. 3.)

Ce dernier reproche ne me paraît pas fondé; car, quand une équation est proposée, on est censé l'avoir débarrassée, préalablement, des diviseurs commensurables, ce que l'on sait faire.

5. La méthode de *Daniël Bernouilli*, développée par *Euler* dans son *Introduction à l'analise infinitésimale*, n'est aussi qu'un moyen d'approximation. « Cette méthode et celle de *Newton*, quoique » fondées sur des principes différens, reviennent à peu près au » même, dans le fond, et donnent des résultats semblables ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 152.)

6. *Hude* trouva qu'en multipliant chaque terme d'une équation

par l'exposant de l'inconnue, et diminuant cet exposant d'une unité, on avait une nouvelle équation qui renfermait les conditions de l'égalité des racines; *Rolle* découvrit ensuite que les racines de la seconde sont les limites de celles de la première. Ce principe fut la base de sa *Méthode des cascades*. « La longueur des calculs que » cette méthode demande et l'incertitude qui naît des racines ima- » ginaires l'ont fait abandonner depuis long-temps ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 166.)

7. *Stirling* donna ensuite, pour trouver le nombre et les limites des racines des 3.me et 4.me degrés, une méthode qu'*Euler* a généralisée dans son *Calcul différentiel*. « Elle revient dans le » fond à celle de *Rolle* ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 166.)

8. Le célèbre *Fontaine* donna, sans démonstration, en 1747, une nouvelle méthode : je la donne, disait-il, pour l'analise en entier, que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'algèbre. Cette méthode suppose que l'on peut toujours par la substitution des nombres 1, 2, 3, etc., au lieu de l'inconnue, dans les équations qu'elle emploie, trouver deux nombres qui donnent deux résultats de signes différens. « Ce qui n'a lieu, dit M. *Lagrange*, qu'autant » que ces équations ont des racines positives, dont la moindre » différence est plus grande que l'unité (ou, pour parler plus » exactement, qu'autant qu'il y a de ces racines qui ne sont pas » comprises en nombre pair entre deux nombres entiers consécutifs). » D'après cette considération, il est facile de trouver des exemples » où la méthode de *Fontaine* est en défaut ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 162.)

9. On voit, par ce qui précède, qu'on ne connaissait encore aucune méthode directe et sûre, dans tous les cas, lorsque l'illustre *Lagrange* publia, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1767, sa fameuse *Équation au quarré des différences des racines*; il fit voir qu'en mettant dans la proposée, à la place de x, les termes de la progression o, D, 2D, 3D......, dans laquelle D marque un nombre moindre que la plus petite différence des racines, on

était assuré de rencontrer toutes les racines réelles, sans être exposé à passer par-dessus quelqu'une d'entre elles. La grande difficulté était de trouver ce nombre D : l'auteur indiqua trois moyens d'y parvenir.

Le premier consiste à former l'équation au quarré des différences des racines ; « mais, dit l'auteur, pour peu que le degré de l'équation pro-
» posée soit élevé, celui de l'équation des différences monte si haut,
» qu'on est effrayé de la longueur du calcul nécessaire pour trouver la
» valeur de tous les termes de cette équation ; puisque le degré
» de la proposée étant m, on a $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficiens à calculer. (Par
» exemple, pour une équation du dixième degré, la transformée
» serait du 45.me). Comme cet inconvénient pouvait rendre la
» méthode générale presque impraticable, dans les degrés un peu
» élevés, je me suis long-temps occupé des moyens de l'affranchir
» de la recherche de l'équation des différences ; et j'ai reconnu en
» effet que, sans calculer entièrement cette équation, on pouvait
» néanmoins trouver une limite moindre que la plus petite de ses
» racines ; ce qui est le but principal du calcul de cette même
» équation ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 124.)

Le second moyen de trouver D, fut publié dans les *Leçons* que l'auteur donna, en 1795, à l'école normale : il exige le calcul d'une équation du degré m, ayant pour ses racines les différentes valeurs dont est susceptible le coefficient Y de l'avant-dernier terme d'une équation en $(x-a)$; a étant une racine réelle quelconque de la proposée dont x est l'inconnue ; « mais cette équation en Y, dit M. *Lagrange*,
» peut encore être fort longue à calculer, soit qu'on la déduise de
» l'élimination, soit qu'on veuille la chercher directement par la
» nature même de ses racines ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 127.)

Le troisième moyen fut publié en 1798 : il est une modification ou simplification du second, et, quoique moins rebutant que les deux premiers, il peut encore entrainer dans des calculs très-longs, suivant l'aveu de l'auteur. (*De la résolution*, *etc.*, pag. 223.)

« Le nombre D, trouvé d'une de ces trois manières, pourra

» être souvent plus petit qu'il ne serait nécessaire pour faire découvrir » toutes les racines ; mais, dit M. *Lagrange*, il n'y a à cela d'autre » inconvénient que d'augmenter le nombre des substitutions successives » à faire pour x dans la proposée ». (*Séances des écoles normales*, tom. 3, pag. 466.) Cet inconvénient paraît encore assez grave dans la pratique ; car il peut, en certain cas, donner lieu à des milliers et même à un nombre indéfiniment plus grand d'opérations superflues ; du reste, l'auteur l'a considérablement diminué, en donnant le moyen d'opérer, par de simples additions et soustractions, les substitutions des nombres entiers qui suivent celles des m premiers nombres 1, 2, 3, etc., dans une équation du degré m.

La méthode de *Lagrange* atteint-elle le but de son auteur ? « Celui de déterminer les premières valeurs à substituer pour x, » de sorte que d'un côté on ne fssse pas trop de tâtonnemens inutiles, » et que de l'autre on soit assuré de découvrir, par ce moyen, » toutes les racines réelles de l'équation ». (*Séances des écoles normales*, tom. 3, pag. 477.)

Après avoir rapporté le jugement de ce géomètre illustre, sur les travaux de ses devanciers, tout en rendant hommage à son génie immortel, il faut oser le juger lui-même. On est forcé de convenir que, si la théorie des racines lui doit beaucoup, l'art de les trouver dans la pratique ne lui a pas les mêmes obligations, et que sa méthode, la seule directe et rigoureuse jusqu'à lui, est néanmoins impraticable dans les degrés un peu élevés : il n'a pas rempli son objet, celui de trouver une méthode usuelle et assez facile pour pouvoir être enseignée dans les livres d'arithmétique, sauf à renvoyer les démonstrations à l'algèbre.

10. En 1807, M. *Budan* a publié une méthode nouvelle qu'il a cru propre à remplir le but de *Lagrange* ; mais l'Institut n'a approuvé que la première partie de son travail, qui est relative aux racines commensurables. Le grand écueil dans cette matière vient du mélange des racines imaginaires avec les réelles, et la méthode de l'auteur devient embarrassée dans cette recherche : elle

cesse alors d'être simple, directe et rigoureuse ; en un mot, la route qu'a suivi l'auteur dans son travail, d'ailleurs recommandable, ne parait pas encore être celle qui doit conduire au but désiré.

11. *Cagnioli*, dans sa *Trigonométrie*, *Kramp* (*Arithmétique universelle, etc.*), et *Legendre* (*Supplément à la théorie des nombres*), ont aussi donné des méthodes ; mais elles ne paraissent pas non plus exemptes des défauts de celles qui ont précédé.

12. Après avoir long-temps travaillé sur cette matière, j'ai cru apercevoir des routes qui n'avaient pas encore été suivies ; je m'y suis engagé, encouragé par cette réflexion, que les découvertes utiles n'ont pas toujours été faites par les plus habiles, mais quelquefois par les plus heureux. J'ai, en effet, trouvé des méthodes qui m'ont paru assez importantes pour mériter d'être publiées. Je vais donner une analise succincte du résultat de mes recherches, et du plan que j'ai suivi dans cet ouvrage.

13. Dans le chapitre II, je fais voir comment la courbe appelée parabolique, retrace à l'œil toutes les propriétés d'une équation déterminée, les théorèmes sur les racines, et les changemens qui surviennent dans les signes de la proposée, quand on déplace l'origine des abscisses. Ce dernier point de vue qui pourra paraître nouveau, jette le plus grand jour sur la matière, et a été pour moi la source de plusieurs découvertes.

Je rapporte ensuite plusieurs règles pour trouver des limites des racines, pour déterminer les racines commensurables, ainsi que celles qui sont égales.

Après ces notions préliminaires, j'expose, dans le chapitre III, une méthode nouvelle pour découvrir les racines incommensurables : elle est fondée d'une part sur les changemens qui surviennent, dans les variations des signes de la proposée, quand on déplace l'origine des abscisses : de l'autre, sur la connaissance préalable des limites des racines. Cette méthode peut être appelée *Méthode des limites successives*, ou encore, *Méthode des changemens d'abscisses* ; c'est en la comparant aux autres procédés connus, que les géomètres

pourront l'apprécier. Elle me paraît être, à la fois, directe, rigoureuse, sure, expéditive et facile.

Dans le chapitre IV, je donne des méthodes analitiques particulières aux 3.me, 4.me et 5.me degrés; ainsi que des méthodes graphiques qui m'appartiennent, pour trouver les racines des 3.me, 4.me, 5.me degrés, par l'intersection d'une parabole invariable servant pour toutes les équations du même degré, avec un cercle ou une parabole variables, suivant les coefficiens numériques de la proposée.

Dans le Vme chapitre, je rappelle la balance algébrique que j'ai déjà publiée, au moyen de laquelle on trouve promptement et presque sans calculs les racines réelles des équations d'un degré quelconque; mais j'ajoute des détails sur la manière d'exécuter cet instrument, ainsi qu'un procédé nouveau.

Le chapitre VI est consacré à déterminer les racines imaginaires des équations tant littérales que numériques. Ce problème a été traité par MM. *de Gua*, *Lagrange* et *Cauchi*; mais, leurs solutions qui dépendent d'équations auxiliaires nombreuses et d'un degré élevé, sont si compliquées qu'elles deviennent impratieables. J'ai trouvé sur cette matière un théorème simple et fécond qui, je crois, ne laisse plus rien à désirer sur cette matière; puisque ce problème, si difficile, se trouve réduit à la difficulté de celui qui est relatif à la détermination des racines égales. Je ne crains pas d'avancer que ce théorème est un pas important fait dans l'algèbre.

Enfin, dans le chapitre VII, je résous un autre problème qui fait suite au précédent : celui de distinguer, dans une équation proposée, les nombres respectifs des racines réelles soit positives, soit négatives, sans en connaître les grandeurs. Ma solution, qui se tire du même principe que la précédente, a aussi la même simplicité, et complète ce sujet.

En finissant cette esquisse, qu'il me soit permis de rendre hommage au génie de l'immortel *Descartes* : sa règle des signes joue le plus grand rôle dans cet ouvrage. C'est un principe fécond qui, associé à quelques autres, donne la clef des questions les plus épineuses d'algèbre.

CHAPITRE II.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

14. DEUX voies se présentent pour découvrir les théorèmes relatifs aux racines : la 1.re consiste à considérer une équation comme un polynôme résultant du produit de plusieurs facteurs, et à raisonner d'une manière purement analitique, sur les combinaisons de ces facteurs. Dans l'autre, on considère le premier membre d'une équation comme l'ordonnée d'une courbe du genre parabolique : cette courbe retrace à l'œil, d'une manière nette et facile, toutes les propriétés des équations.

Je ne décide point laquelle de ces deux méthodes est préférable : chacune d'elles a, sans doute, des avantages particuliers ; mais la 2.me m'a fait trouver des théorèmes qu'il eût été difficile de lire dans des formules analitiques. L'art de découvrir des vérités mathématiques n'est, le plus souvent, comme en physique, que celui de bien observer. Quand une vérité est une fois reconnue par l'observation, il devient bien plus aisé de la démontrer par le calcul. Pour que *Newton* trouvât les lois du mouvement des planètes, il a fallu que *Képler* les eût observées.

15. Soit $X=0$ une équation déterminée dont l'inconnue est x ; si l'on construit la courbe, appelée parabolique, dont l'équation est $X=y$, elle fournit les remarques suivantes :

1.° La courbe est composée, en général, d'ondulations dont les branches serpentent au-dessus et au-dessous de l'axe O des x, comme on le voit dans les figures 2, 3, 4, 5 relatives aux équations des degrés 2, 3, 4, 5 ;

2.°

2.° Si X est de degré pair, la courbe (fig. 2 et 4) se termine par deux branches infinies qui se prolongent toutes deux au-dessus de l'axe des x. Si X est de degré impair (fig. 3 et 5), l'une des branches se prolonge indéfiniment au-dessus de l'axe, et l'autre en dessous;

3.° La courbe présente trois espèces de points remarquables, 1.° les points R_1, R_2, R_3, ... où la courbe rencontre l'axe et qui détermine les racines de la proposée : en ces points on a $y=0$ et $x=OR$; 2.° les sommets S_1, S_2, S_3, ..., où l'ordonnée y devient un *maximum* ou un *minimum* : les abscisses de ces points sont, comme on sait, les racines de la première dérivée de $X=0$; 3.° les points I_1, I_2, I_3, ... où la courbure change de signe; les abscisses de ces points d'inflexions sont les racines de la seconde dérivée de $X=0$.

4.° Si l'axe rencontre toutes les branches de la courbe, la proposée $X=0$ a toutes ses racines réelles.

5.° Si l'axe ne rencontre aucune branche, ce qui ne peut arriver que quand X est de degré pair, la proposée n'a que des racines imaginaires; d'où il suit que toute équation de degré impair a, au moins, une racine réelle de signe contraire à celui du terme connu.

6.° Il y a autant de couples d'imaginaires, qu'il y a de sommets pour lesquels l'ordonnée est un *minimum*; c'est-à-dire qui tournent leur convexité vers l'axe. Cette remarque est de la plus grande importance pour la détermination des racines imaginaires.

7.° Si l'axe touche la courbe dans un sommet, il y a deux racines égales dans la proposée.

8.° Le degré de la courbe étant 2, 3, 4, 5,.......m, le nombre de positions différentes et parallèles que l'axe des x peut avoir à l'égard de la courbe, est 3, 5, 7, 9,..........$2m-1$, dont chacune change le nombre et l'espèce des racines.

9.° Entre deux points de la courbe dont les ordonnées sont de signes contraires, il y a toujours un nombre impair d'intersections

avec l'axe, lequel correspond à un pareil nombre de racines réelles dans la proposée.

10.° Entre deux points dont les ordonnées sont de même signe, il existe 0, 2, 4, ... c'est-à-dire, un nombre pair de racines soit réelles, soit imaginaires.

11.° Si, pour une même position de l'axe, on fait mouvoir l'origine O des coordonnés, en faisant $x=z+l$ dans $X=y$, le nombre des racines imaginaires ne change pas; mais, le rapport des racines réelles positives aux négatives change; de plus, la transformée en z éprouve un changement dans ses signes, chaque fois que l'origine O dépasse soit une branche de la courbe, soit une ordonnée de sommet S, soit une ordonnée de quelque point I d'inflexion.

12.° Si l'origine O est transportée sur un point de la courbe, le terme constant de la transformée en z s'anéantit; s'il est transporté sur une ordonnée de sommet, c'est l'avant-dernier terme, celui en z, qui s'anéantit; s'il est transporté sur une ordonnée de point d'inflexion, c'est l'antépénultième, celui en z^2, qui devient nul.

13.° Si l'origine dépasse une branche de la courbe, la transformée perd une variation; elle en perd deux si l'origine outrepasse, soit deux branches, soit une ordonnée *minima*, c'est-à-dire, de sommet convexe.

14.° Si l'origine dépasse un nombre impair de branches, le terme constant de la transformée en z change de signe; si ce nombre est pair, le terme ne change pas de signe.

15.° Le nombre des sommets S_1, S_2, ... est moindre d'une unité que le degré de la proposée, si sa dérivée a toutes ses racines réelles; mais la courbe perd autant de sommets que cette dérivée a de racines imaginaires.

16.° Quand on déplace l'origine O, l'avant-dernier terme de la transformée en z diminue à mesure que l'origine approche de l'ordonnée du sommet, pour devenir nul en ce point et changer

de signe après ce point ; mais, ce changement de signe n'a plus lieu si l'abscisse du sommet est imaginaire.

17.° Quoique l'abscisse d'un sommet soit imaginaire, (comme il arrive pour la figure 6 qui n'a qu'un sommet réel et deux imaginaires) ; la transformée en z perd deux variations, lorsque l'origine O dépasse l'ordonnée *minima* imaginaire.

18.° Quand on change la grandeur du terme constant de la proposée $X=y$, on fait mouvoir l'axe des x parallèlement à lui-même, sans changer sa direction.

19.° Quand on change la direction de l'axe des x, des racines réelles peuvent devenir imaginaires, des sommets réels disparaître, et réciproquement.

16. Je crois utile de rapporter encore ici quelques autres théorèmes sur les équations pour compléter ceux du numéro précédent.

1.° Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair, et vont par couple de la forme $A+B\sqrt{-1}$ et $A-B\sqrt{-1}$, dont le produit est un facteur réel du second degré $(x-A)^2+B^2$.

2.° Une équation peut toujours être conçue comme le produit d'autant de facteurs $x-a$, $x-b$,...... qu'il y a d'unités dans l'exposant m de son degré ; alors elle est divisible par $x-a$, $x-b$,...... elle peut aussi être considérée comme le produit des facteurs du 2.me degré ou du 3.me, etc.

3.° Lorsque la substitution de deux nombres n et n' à la place de x dans $X=0$, donne deux résultats de signe contraire, on est assuré qu'il existe un nombre impair de racines réelles dont la valeur est comprise entre n et n'.

Si les deux substitutions donnent des résultats de même signe, le nombre des racines réelles comprises est toujours pair, savoir, 0, 2, 4,....

4.° En mettant $-x$ pour $+x$, c'est-à-dire, en changeant les signes des termes de rang pair, ou bien ceux de rang impair, les racines positives deviennent négatives, et *vice versâ*, sans changer de grandeur ; d'où il suit que quand on sait trouver les racines positives, on sait aussi trouver les négatives.

5.° Dans les équations de degré pair, si le dernier terme est négatif, il y a toujours au moins une racine réelle positive et une négative ; mais, si ce terme est positif, on ne peut rien en conclure.

6.° Quand on met $x+l$ pour x dans $X=0$, le terme constant de la transformée est le même que si on avait mis seulement l pour x dans X ; donc, si ce terme constant de la transformée est nul, l est une racine de $X=0$.

7.° On peut toujours préparer une équation de manière que le coefficient du premier terme soit l'unité, et que les autres soient des nombres entiers ; alors ses racines ne peuvent être que des nombres entiers, ou des nombres fractionnaires irrationnels, mais non des fractions rationnelles.

8.° On connaît aussi le moyen de débarrasser une équation de ses racines égales.

9.° Une équation ne peut avoir plus de racines réelles positives qu'il n'y a de variations dans la succession des signes de ses coefficiens, ni plus de racines réelles négatives, qu'il ne s'y trouve de permanences de signes ; c'est la fameuse règle de *Descartes*.

Il en résulte que, quand toutes les racines sont réelles, il y a précisément autant de racines positives que de variations, et autant de négatives que de permanences.

10.° Quand il manque un terme dans une équation, et que les deux termes voisins sont de même signe, elle a nécessairement des racines imaginaires ; mais elle peut aussi en avoir, quoique cette condition n'existe pas.

On verra plus loin le théorème général, que j'ai trouvé le premier, sur la détermination des racines imaginaires, dans les équations de tous les degrés.

17. *Règles pour trouver les diviseurs commensurables.* Une racine en nombres entiers ne peut être que l'un des diviseurs du dernier terme.

Pour distinguer si le nombre a, diviseur du dernier terme, est racine de l'équation, après avoir divisé le dernier terme par a, on

retranchera ce quotient du coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera cette différence par a ; puis on soustraira ce quotient du coefficient de l'antépénultième terme, et ainsi de suite. Si tous ces quotiens sont des nombres entiers, et si, de plus, la différence entre le coefficient du deuxième terme de la proposée et le quotient précédent, sont l'unité, le nombre a sera racine de l'équation ; dans le cas contraire, il doit être rejeté.

On essaie à la fois tous les diviseurs du dernier terme, en formant un tableau. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce procédé, parce qu'on les trouve dans tous les élémens d'algèbre.

La méthode de M. *Budan* peut aussi être employée avantageusement, quand le terme connu n'est pas un grand nombre. (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 402 et 403.)

18. *Des limites.* La méthode que nous exposerons dans le chapitre suivant, pour déterminer les racines réelles, suppose qu'on connaît déjà des limites de ces racines ; c'est pourquoi nous allons rapporter plusieurs procédés pour obtenir ces limites.

1.re *Règle.* Si, au coefficient du premier terme x^m d'une équation, on ajoute le plus grand coefficient de signe contraire, pris sans égard au signe, et qu'on divise la somme par ce premier coefficient, le quotient est plus grand que la plus grande racine positive : c'est la limite supérieure des racines positives.

Si on change $+x$ en $-x$ dans la proposée, le quotient obtenu par la règle précédente, est la limite supérieure des racines négatives.

Si on divise le terme constant par la somme de ce terme et du plus grand coefficient de signe contraire, abstraction faite de ce signe, le quotient est plus petit que la plus petite racine positive, c'est-à-dire, qu'il est la limite inférieure des racines positives.

Si on change $+x$ en $-x$ dans la proposée, le quotient obtenu par la dernière règle, est la limite inférieure des racines négatives.

2.me *Règle.* La proposée étant $x^m + \ldots\ldots = 0$, n étant l'exposant du premier des termes négatifs à partir de x^m et S le plus grand

coefficient négatif, la limite supérieure des racines positives sera $x=1+\sqrt[m-n]{S}$.

La proposée étant écrite de manière que son dernier terme T soit positif, si S est le plus grand coefficient négatif, et n l'exposant du premier des termes négatifs, à partir du terme T, la limite inférieure des racines positives sera $x=\frac{1}{1+\sqrt[m-n]{\frac{S}{T}}}$ (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 422).

3.me *Règle*. En ajoutant successivement à l'unité une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme de tous les coefficiens positifs qui les précèdent respectivement; le plus grand des nombres résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation. Il est entendu, au surplus, qu'il suffit de considérer le plus grand coefficient dans chacune des séries de termes négatifs (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 114).

Pour avoir la limite inférieure positive de x, on fera $x=\frac{1}{z}$, et ayant trouvé la limite supérieure de z; $\frac{1}{z}$ sera la limite inférieure de x.

On aurait les deux limites négatives de x en changeant préalablement les signes des termes de rangs pairs dans la proposée; c'est-à-dire, en changeant $+x$ en $-x$.

4.me *Règle*. On peut obtenir des limites plus approchées en faisant $x=rz$, r étant une indéterminée dont on fixe ensuite la valeur par la condition que la limite qui en résulte pour x soit la plus approchée. Ce perfectionnement, qui peut se faire par une espèce de tâtonnement, peut s'appliquer à chacune des méthodes précédentes.

Soit proposé, par exemple,

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-10)=x^4-28x^3+287x^2-1280x+2100=0 ;$$

par la 1.re règle, la limite inférieure positive est $x=\frac{2100}{2100+1280}=0{,}6$.

Pour avoir une limite plus approchée, je fais $x=rz$, la transformée est

$$r^4z^4-28r^3z^3+287r^2z^2-1280rz+2100=0 .$$

Si l'on prend r tel que $28r^3>1280r$ ou $r>7$, ce sera le terme $-28r^3z^3$ qui fournira la limite d'après la 1.re règle, laquelle sera $z=\frac{2100}{2100+28r^3}$, et par conséquent $x=\frac{2100r}{2100+28r^3}$. Cette fraction devient un *maximum* quand on prend $r=7$, et donne $x=1{,}4$ environ.

Si l'on prend $r<7$, c'est le terme $-1280rz$, qui fournit la limite, laquelle est pour la proposée $x=\frac{2100r}{2100+1280r}$. Cette fraction devient un *maximum* quand $r=7$ environ, et donne $x=1{,}3$; ainsi, la limite la plus approchée par cette méthode, est $x=1{,}4$. La vraie valeur est $x=5$.

5.me *Règle.* Si le second terme a un coefficient négatif qui ne soit surpassé par aucun des autres coefficiens négatifs, on prendra pour limite supérieure ce coefficient considéré comme positif et augmenté de l'unité, le premier coefficient étant supposé un.

Mais, si le plus grand coefficient négatif n'est pas celui du second terme, soient $-A_ix^{n-i}$ et $-A_kx^{n-k}$ les deux termes négatifs pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands possibles; il faudra prendre pour limite supérieure positive $x=\sqrt[i]{A_i}+\sqrt[k]{A_k}$.

Si la proposée n'avait qu'un seul terme négatif $-A_kx^{n-k}$, la limite de x serait simplement $\sqrt[k]{A_k}$.

En faisant $x=\frac{1}{z}$ et cherchant la limite supérieure de z, la limite inférieure de x sera $x=\frac{1}{z}$. (*Supplément à la théorie des nombres de Legendre*, pag. 28.)

19. *Des racines égales.* Il n'y a rien à ajouter sur cette matière qui est approfondie depuis long-temps : voici la règle connue.

Si la proposée est $X=0$, et sa première dérivée $X'=0$, en appelant D le plus grand commun diviseur entre X et X', ce diviseur D contiendra toutes les racines égales de la proposée ; mais élevée à une puissance moindre d'une unité. En divisant X par D, on aura une nouvelle équation qui ne contiendra plus de racines égales.

Le facteur D peut encore être composé lui-même de plusieurs facteurs différens entre eux, doubles, triples, etc. On le décomposera à son tour en l'égalant à zéro, et en opérant sur lui comme on a fait pour le polynôme X : on traiterait encore de la même manière le second diviseur commun E, et ainsi de suite.

Soit proposé, par exemple,

$$X=x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8=0\ ;$$

on a

$$X'=9x^8+16x^7+7x^6+36x^5+35x^4-8x^3+9x^2+4x-12=0\ .$$

On trouve

$$D=x^4+x^3+x^2+3x+2\ .$$

La dérivée de D est

$$D'=4x^3+3x^2+2x+3\ ;$$

on trouve

$$E=x+1\ .$$

Divisant D par $(x+1)^2$, on a pour quotient

$$x^2-x+2\ .$$

Donc

$$D=(x^2-x+2)(x+1)^2\ .$$

Divisant X par $(x^2-x+2)^2(x+1)^3$, on a pour quotient

$$x^2+x-2\ .$$

Donc enfin

$$X=(x^2+x-2)(x^2-x+2)^2(x+1)^3\ .$$

CHAPITRE III.

CHAPITRE III.

MÉTHODE NOUVELLE POUR DÉTERMINER LES RACINES RÉELLES INCOMMENSURABLES.

20. La méthode que je vais exposer résulte des remarques faites dans le n.° 15, sur ce qui arrive dans l'équation $X=y$, quand on déplace l'origine O des x, en faisant $x=z+l$. Nous avons vu que la transformée en z perd 1, 2, 3, ...n variations, suivant que l'origine a dépassé 1, 2, 3, ...n racines réelles ou imaginaires : c'est ce principe qui seul va nous fournir la solution du problème.

Soit $X=0$ la proposée, $X=y$ la courbe parabolique (fig. 4, 5) qui représente la proposée ; O_1 l'origine des x ; l_1 la limite inférieure des racines positives de la proposée. Si on met dans $X=y$, z_1+l_1 au lieu de x, on aura une transformée $Z_1=y$, dans laquelle l'origine des z_1 sera placé quelque part en O'_1 entre la première origine et la branche la plus voisine ; soit ensuite l_2 la limite inférieure des racines positives des $Z_1=0$, si dans $Z_1=y$ on met z_2+l_2 au lieu de z_1, ou, ce qui revient au même, si on met $z_2+l_1+l_2$ au lieu de x dans $X=y$, on aura une deuxième transformée $Z_2=y$, pour laquelle l'origine de z_2 sera située quelque part en O''_2 entre O'_2 et la courbe.

Il est évident qu'en continuant ainsi à former de nouvelles transformées $Z_3=y$, $Z_4=y$ ...., l'origine des abscisses se rapprochera continuellement de la courbe : la racine cherchée sera exprimée par $x=l_1+l_2+l_3$ ......, et l'on pourra en approcher d'aussi près qu'on

voudra, sans jamais craindre de la dépasser : si cette racine était commensurable, la série l_1, l_2, l_3,....... se terminerait quand l'origine serait transportée sur la courbe ; alors le terme constant des transformées successives, qui va toujours en diminuant, deviendrait nul.

Voilà donc un procédé direct et infaillible de trouver la plus petite racine positive avec le degré d'exactitude dont on a besoin : voyons comment la même méthode peut faire découvrir les autres racines (*).

Si on connaissait la loi de décroissement des limites successives l_1, l_2, l_3........, on pourrait, en sommant cette série, avoir la valeur exacte de x : on voit encore que si l_4 est un nombre un peu plus grand que la vraie valeur de la plus petite racine positive, et qu'on mette x_4+l_4 dans $X=y$, à la place de x, cette nouvelle transformée $Z_4=y$ aura une variation de moins que la dernière transformée $Z_3=y$, à laquelle on s'est arrêté, et qui, elle-même, a perdu autant de fois deux variations que l'origine O a rencontré d'ordonnées *minima* pour parvenir à la courbe. (Voyez le 13.° du n.° 15).

Il suit de là qu'on pourra continuer les transformées en choisissant pour l_4 un nombre tel que $Z_4=y$, ait une variation de moins que $Z_3=y$; ce choix peut se faire à l'inspection de l_1, l_2, l_3, et si on ne rencontrait pas un nombre convenable, un second essai suffirait toujours ; mais, il faut bien remarquer que ce nombre l_4, qui doit être plus grand que la limite inférieure de $Z_3=0$, n'est point une limite. Ayant une fois obtenu la transformée $Z_4=y$, qui a une variation de moins que $Z_3=y$, on continue une nouvelle

---

(*) On pourrait, comme a fait M. *Legendre*, abaisser la proposée d'un degré en divisant la proposée par $x-l_1-l_2-l_3$ ....; mais le reste des divisions n'est pas exact, parce que le diviseur ne l'est pas, et il en résulte des inconvéniens qui peuvent être graves dans certains cas.

série de transformées, dans lesquelles l_5, l_6......, sont les limites inférieures de $Z_4=0$, $Z_5=0$, ...On arrivera par ce moyen à l'expression de la seconde racine qui est $x=l_1+l_2+l_3+l_4+l_5$,..... On suivra la même marche pour trouver toutes les autres racines de la proposée. Le procédé sera uniforme et constant : il n'y aura d'irrégulier qu'un essai, au plus, à chaque rencontre d'une branche nouvelle, pour que la nouvelle transformée perde une seule variation.

On pourra aussi trouver la plus grande racine positive que j'appelle x_1, en mettant, dans $X=0$, $L-x_1$, pour x (L étant la limite supérieure positive de $X=0$), et traitant la transformée $X_1=0$, qui aura toutes ses racines positives, comme on a fait pour $X=0$. La plus petite racine positive de $X_1=0$ sera la plus grande de $X=0$, et la plus grande de $X_1=0$ sera la plus grande négative de $X=0$, si celle-ci en a.

On peut encore avoir les racines négatives de $X=0$, en y changeant $+x$ en $-x$; par là les négatives deviendront les positives ; et *vice versâ*.

On voit, par ce qui précède, que si la proposée a plus de deux racines réelles positives et de deux négatives, on trouvera directement les deux plus grandes et les deux plus petites; ce qui établit une ligne de démarcation entre le 4.me degré et le 5.me qui exige un essai de plus, pour les racines comprises entre les extrêmes.

Afin de faciliter la formation des transformées successives en z, on emploira les formules suivantes.

Soit la proposée

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5\ldots\ldots+x^m=0=X\ ;$$

en y substituant $z+l$ pour x, on a la transformée suivante

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5\ldots\ldots+z^m=0=Z\ ,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$A = a + bl + cl^2 + dl^3 + el^4 + fl^5 \ldots + l^m$$

$$B = b + 2cl + 3dl^2 + 4el^3 + 5fl^4 \ldots + ml^{m-1}$$

$$C = c + 3dl + 6el^2 + 10fl^3 \ldots + m.\frac{m-1}{2} l^{m-2}$$

$$D = d + 4el + 10fl^2 \ldots + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.l^{m-3}$$

$$E = e + 5fl \ldots + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.l^{m-4}$$

$$F = f \ldots + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.l^{m-5} \quad (*)$$

. . . .

L'usage de ces formules est simple. Pour avoir les transformées successives $Z_1=0$, $Z_2=0$, $Z_3=0$......, il suffit de mettre dans $Z=0$ successivement, l_1, l_1+l_2, $l_1+l_2+l_3$ ......, au lieu de l; c'est-à-dire qu'il faut faire ces substitutions dans les expressions de A, B, C........, pour avoir les valeurs numériques de ces lettres et les rapporter dans $Z=0$.

21. *Simplification de la méthode.* En réfléchissant sur la méthode précédente, on sentira qu'on peut diminuer le nombre des transformées, en employant pour l, au lieu des nombres l_1, l_1+l_2, $l_1+l_2+l_3$,....... d'autres nombres un peu plus grands, tels que les auraient procuré une règle plus parfaite pour les

(*) Les coefficiens A, B, C,........, dérivent les uns des autres par la loi de différentiation,

$$B = \frac{dA}{dl}\ ;\ C = \frac{dB}{2dl}\ ;\ D = \frac{dC}{3dl}\ ;\ E = \frac{dD}{4dl}\ ;\ F = \frac{dE}{5dl}\ \ldots$$

limites : on pourra même, lorsqu'on sera parvenu à une valeur de x, approchée à moins de $\frac{1}{10}$ de sa vraie valeur, prendre pour limite inférieure de la dernière transformée, le nombre $\frac{-A}{B}$ (*), fourni par cette dernière transformée. A la vérité, il pourra arriver quelquefois qu'on passe par-dessus la racine cherchée ; mais on en sera de suite averti, parce que la nouvelle transformée aura perdu 1, 2, 3,......... variation, et l'on reviendra sur ses pas.

La circonstance de deux variations perdues, mérite d'être remarquée ; elle a lieu dans deux cas ; 1.° si l'on a dépassé deux branches de la courbe très-voisine ; 2.° si l'on a dépassé une ordonnée *minima* ou de sommet convexe, laquelle est réelle ou imaginaire, suivant que les racines de la dérivée de $X=0$ sont elles-mêmes réelles ou imaginaires (**) : ces deux cas sont faciles à distinguer, en se rappelant les remarques 6.°, 12.°,.......16.° du n.° 15. En effet, dans le premier cas seulement, le terme constant qui a diminué à mesure que l'origine s'approchait de la courbe, est devenu très-petit et voisin de zéro.

Au reste, pour éviter toute incertitude, on regardera comme non avenue la dernière transformée qui a perdu deux variations ; on en formera une nouvelle, d'après la méthode générale du n.° précédent ; c'est-à-dire, en prenant pour l le nombre qui a servi à former la transformée Z_{n-1} (Z_n étant celle qu'on a abandonnée) ; et en ajoutant à ce nombre la limite inférieure de Z_{n-1}. Alors, si la nouvelle transformée Z_n perd encore deux variations, on sera assuré

(*) C'est la méthode de *Newton* ; mais rectifiée et rendue sûre par un mode de vérification tiré de nos principes.

(**) La transformée perd aussi deux variations si l'on dépasse deux racines égales : alors A et Bz dans l'équation $Z=0$, après avoir diminué ensemble, s'anéantissent, puis reparaissent avec un signe différent : au surplus, la proposée est censée avoir été débarrassée des racines égales, quoiqu'elles ne soient pas un obstacle.

que les deux racines douteuses qu'on a outre-passées sont imaginaires, et l'on continuera l'opération sans s'en inquiéter.

Par ce moyen, le procédé du présent n.° sera aussi sûr que celui du précédent ; mais il fera marcher à plus grand pas sur l'axe des x, et l'on reconnaîtra plus promptement toutes les racines l'une après l'autre.

22. *Exemple*. Soit proposé

$$2-6x+7x^2-5x^3+x^4=0=X\ ,\ (*)$$

d'après la première règle du n.° 18, la limite inférieure positive de X est $l_1=\frac{2}{2+6}=0,3$; et je substitue 0, 3 au lieu de l dans les expressions de A, B, C, D du n.° 20 qui sont ici

$$A=2-6l+7l^2-5l^3+l^4\ ,\qquad B=-6+14l-15l^2+4l^3\ ,$$

$$C=7-15l+6l^2\qquad ,\qquad D=-5+4l\ ;$$

par là la formule

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+z^4=0=Z\ ;$$

donne pour première transformée

$$z_1^4-3,8z_1^3+3,04z_1^2-3,042z_1+0,7031=0=Z_1\ :$$

Je prends pour limite de $Z_1=0$, $l_2=0,2$, et je mets $0,3+0,2$ ou $0,5$ pour l, dans la formule de transformation $Z=0$; il vient pour deuxième transformée

$$z_2^4-3z_2^3+z_2^2-2,25z_2+0,1875=0=Z_2\ :$$

(*) Ou $(x^2-x+1)(x^2-4x+2)=0$.



Je prends pour limite de $Z_2=0$, $l_3=0{,}08$, et je mets dans la formule $Z=0$, $0{,}3+0{,}2+0{,}08$ ou $0{,}58$ pour l; il vient pour troisième transformée

$$z_3^4-2{,}68z_3^3+0{,}3184z_3^2-2{,}145552z_3+0.01240496=0=Z_3 .$$

La petitesse du terme constant de cette troisième transformée m'avertit que l'origine des abscisses approche fort près de la courbe, et que je puis, sans inconvéniens, prendre pour limite de la dernière transformée en z_1, (abscisse devenue assez petite)

$$l_4=\frac{-A}{B}=\frac{0{,}01240496}{2{,}145552}=0{,}00578 ,$$

et j'ai, pour la plus petite racine cherchée,

$$x'=l_1+l_2+l_1+l_4=0{,}58578 .$$

En mettant $0{,}58578$ pour l, dans la formule $Z=0$, on aurait une quatrième transformée $Z_4=0$ qui fournirait une valeur $x'=0{,}58578-\frac{A}{B}$ beaucoup plus approchée que la précédente $\left(\frac{-A}{B}\right.$ étant fourni par $\left.Z_4=0\right)$.

Je passe à la recherche de la deuxième racine. Je mets $0{,}6$ pour l dans la formule $Z=0$, et j'ai, pour quatrième transformée,

$$z_4^4-2{,}6z_4^3+0{,}16z_4^2-2{,}136z_4-0{,}0304=0=Z_4 ,$$

qui, ayant perdu une variation, m'apprend que l'origine a dépassé une branche.

Je mets $0{,}62$ pour l dans la formule $Z=0$, et j'ai, pour cinquième transformée,

$$z_5^4-2{,}52z_5^3+0{,}0064z_5^2-2{,}133312z_5-0{,}07307664=0=Z_5 .$$

Pour avancer plus rapidement, je mets 1 pour l dans $Z=0$, et il vient une sixième transformée qui a deux variations de moins que la précédente : j'en conclus qu'il y a deux racines entre $x=0{,}62$ et $x=1$; il s'agit de savoir si elles sont réelles ou imaginaires. Je pourrais déja deviner qu'elles sont imaginaires, parce que le terme A ne tend pas vers zéro dans les dernières transformées. Afin d'en être plus sûr, je prends la limite inférieure de $Z_5=0$, laquelle est $\frac{0{,}073076664}{0{,}073076664+1}=0{,}07$ environ, et je l'ajoute avec $0{,}62$: je mets la somme $0{,}69$ pour l dans $Z=0$; il vient une nouvelle transformée qui a encore deux variations de moins que $Z_5=0$; d'où je conclus avec certitude que les deux racines douteuses sont imaginaires.

Je procède donc à la recherche de la quatrième racine qui est nécessairement réelle, et, comme il n'y a aucune incertitude à craindre, j'emploie la méthode commune. Je substitue successivement pour x dans la proposée $X=0$, 1, 2, 3, 4, et ayant reconnu, par deux résultats de signes contraires, que la racine cherchée est entre 3 et 4, et ensuite qu'elle est entre 3, 4 et 3, 5 ; je mets 3, 4 pour l dans les valeurs de A, B, et j'ai pour la quatrième racine $x=3{,}4-\frac{A}{B}$ ou $x=3{,}4142$. On pouvait aussi procéder comme à la fin du n.° 20.

23. *Autre simplification.* On peut encore abréger les calculs de la méthode précédente, ainsi qu'il suit.

Je construis la courbe $X=y$ en calculant seulement quelques ordonnées de loin en loin (ce qui peut se faire promptement par la méthode n.° 39) : cette esquisse de la courbe suffit, d'ordinaire, pour en connaître le cours et les particularités, ainsi que pour avoir une première valeur approchée des racines : on les détermine ensuite avec plus d'exactitude par la méthode de *Newton*, qui est, le plus souvent, sans inconvénient.

S'il arrive que quelques sommets convexes s'approchent assez près de l'axe des x pour faire douter si cet axe doit couper la courbe en

en ce point, on calcule quelques ordonnées intermédiaires qui suffisent, presque toujours, pour lever le doute.

Enfin, si cela ne suffit pas pour lever l'incertitude, on a recours à la méthode précédente ; mais seulement pour les points douteux.

On sent que cette deuxième méthode doit être plus prompte que la première, puisque, au lieu d'être obligé de calculer tous les coefficiens A, B, C, D,....., il suffit, pour l'ordinaire, de connaître A et B. Dans l'exemple du numéro précédent, la courbe n'a qu'un sommet concave, et l'ordonnée *minima* de sommet convexe est imaginaire (fig. 6). La méthode du présent numéro s'applique ici avantageusement, parce que la figure ne présente aucun point douteux qui exige l'emploi de la méthode générale des numéros 20 et 21.

24. *Remarque sur les limites.* La méthode de ce chapitre serait plus expéditive en ce qu'elle exigerait moins de transformations, si l'on avait une règle qui procurât une première limite plus approchée : *Newton* en a donné une qui est fautive dans beaucoup de cas, et qu'il est utile de signaler.

Si, dans $X=0$, on met $z+l$ pour x, on a une transformée $Z=0$: si, dans celle-ci, on met pour l un nombre tel que Z ait tous ses termes positifs (nombre qu'il faut trouver par tâtonnement), il est évident que l sera une limite supérieure de $X=0$, et qu'en diminuant ce nombre, on approchera de plus près de la racine. Cette conséquence de *Newton* sera vraie, si la plus grande racine positive est réelle ; mais, si cette plus grande racine est un couple imaginaire, on ne pourra le dépasser sans que la transformée perde deux permanences ; on pourra être encore bien loin de la plus grande racine positive réelle : la limite trouvée sera très-peu approchée, et la règle sera en défaut ; aussi je ne l'ai rapportée que pour empêcher de la confondre avec les procédés de ma méthode (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 424, où le défaut de cette règle n'a pas été remarqué).

25. *Réflexions.* Après avoir exposé notre méthode, il ne sera pas

inutile de la comparer avec celles qui sont le plus en usage, afin de faire mieux sentir les points de la difficulté à vaincre, et le but qu'il fallait atteindre.

Le moyen qui se présente le plus naturellement pour découvrir les racines, c'est de substituer dans X, pour x, des nombres tant positifs que négatifs, en progression arithmétique, jusqu'à ce qu'on ait obtenu des résultats de signes contraires : on est alors assuré qu'il existe un nombre impair de racines entre les deux nombres qui ont procuré ces résultats; mais il est évident qu'on peut dépasser un nombre pair de racines, sans obtenir des résultats de signes contraires : ainsi, ce premier moyen n'est ni sûr ni suffisant.

Newton supposa cette première difficulté levée, et donna une méthode pour approcher de plus près de la racine déjà trouvée; mais *Lagrange* fit voir qu'il pouvait arriver, dans certain cas, qu'on s'éloignât de la vraie valeur, au lieu de s'en approcher. « L'usage » de la méthode dont il s'agit n'est sûr que lorsque la valeur ap- » prochée a est à la fois ou plus grande ou plus petite que chacune » des racines réelles de l'équation, et que chacune des parties réelles » des racines imaginaires; et, par conséquent, cette méthode ne » peut être employée sans scrupule que pour trouver la plus grande » ou la plus petite racine d'une équation qui n'a que des racines » réelles, ou qui en a d'imaginaires, mais dont les parties réelles sont » moindres que la plus grande racine réelle, ou plus grande que » la plus petite de ces racines ». (*De la résolution*, *etc.*, par *Lagrange*, pag. 141.)

Nous avons déjà vu (n.° 9) que la méthode de *Lagrange* est impraticable, 1.° à cause de la difficulté de trouver le nombre D à substituer pour x, lequel doit être plus petit que la plus petite différence des racines; 2.° parce qu'elle peut exiger, en certains cas, des milliers de substitutions.

La méthode de *Budan* serait préférable, sans l'embarras qui résulte des racines imaginaires, et la nécessité de calculer les décimales l'une après l'autre.

Si je ne me fais illusion, toutes les difficultés disparaissent dans ma méthode. Par le procédé du n.° 20, on trouve, sans incertitude, toutes les racines l'une après l'autre, en parcourant l'axe des x; veut-on marcher plus rapidement, le n.° 21 en fournit le moyen : s'il arrive qu'on ait fait un pas trop grand, on en est averti sur-le-champ par les changemens survenus dans les variations de la transformée : la règle de *Descartes* est là comme une boussole qui indique, à chaque instant, le point où l'on se trouve. Enfin, veut-on un procédé encore plus facile et plus lumineux, le n.° 23 le fournit. Le tracé grossièrement fait de la courbe indique, d'un seul coup-d'œil, les points scabreux ou douteux qui exigent l'emploi de la méthode générale : dans tous les autres points, on marche à grand pas et sans précautions, parce qu'il n'y a pas d'écueil à éviter.

On a pu remarquer que notre expression $\frac{-A}{B}$ du n.° 21, pour avoir une limite plus approchée, ressemble à la méthode de *Newton*; mais, on doit faire attention que l'inconvénient, aperçu par *Lagrange*, n'a plus lieu ici, parce que les changemens survenus dans les variations, font connaître à chaque instant la position de l'origine à l'égard des branches de la courbe.

On pourrait encore, au premier abord, confondre nos transformées en z_1+l_1, z_2+l_2 ...... avec celles de M. *Budan* en $x-1$, $x-2$ ......; mais, nos deux méthodes n'ont absolument rien de commun : dans les transformées de M. *Budan*, l'origine des abscisses x ne change point : dans la nôtre, au contraire, l'origine des z_1, z_2, ..., se meut en se rapprochant de la courbe, et c'est ce mouvement de l'origine combiné avec les changemens de variations, qui constitue le principe de notre méthode, principe qui diffère essentiellement de tous ceux qui ont été employés jusqu'à ce jour.

Dans ce chapitre, j'ai supposé qu'on ignorait, avant d'entreprendre de résoudre l'équation, le nombre de ses racines imaginaires, afin que le commun des lecteurs n'eût besoin que de connaître la méthode de ce chapitre; mais quand on connaîtra la règle du chapitre VI,

sur les racines imaginaires; on marchera d'un pas plus assuré dans la recherche des racines réelles.

Quant à la méthode de M. *Legendre*, fondée sur la considération des fonctions omales, elle diffère trop de la mienne pour qu'il soit besoin de les comparer.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES ANALITIQUES ET GRAPHIQUES, PARTICULIÈRES AUX 3.me, 4.me ET 5.me DEGRÉS.

JE vais rapporter des méthodes analitiques connues, et d'autres graphiques qui m'appartiennent, lesquelles sont particulières aux cinq premiers degrés, et sont plus expéditives que la méthode générale du chapitre précédent.

Troisième degré.

26. *Cas de deux racines imaginaires.* La proposée étant $x^3+px+q=0$, on sait qu'elle a deux racines imaginaires, si $4p^3+27q^2$ est positif. Dans ce cas, on trouve la racine réelle par la formule générale connue

$$x'=-\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right]}-\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right]}.$$

On trouve aussi le facteur réel du deuxième degré, en divisant x^3+px+q par $x-x'$, et on a

$$x^2+xx'+p+x'^2=0\ .$$

27. *Cas irréductible.* Ce cas a lieu quand $4p^3+27q^2$ est négatif: alors les trois racines sont réelles; mais elles se présentent sous une

forme imaginaire dans les trois formules générales : on peut les obtenir par des séries qui ont l'inconvénient d'être trop peu convergentes : la méthode suivante due à *Clairaut* est préférable (Voyez son *Alg.* pag. 298).

Le cas irréductible n'ayant lieu que quand p est négatif, la proposée sera de cette forme

$$x^3-px\pm q=0 .$$

On aura une racine x' approchée à moins d'un millième près, dans les cas les plus défavorables, par cette formule,

$$x'=\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{p}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{p\pm\frac{3q}{\sqrt{p}}} ,$$

dans laquelle le signe supérieur répond à q positif, et *vice versâ*.

On aura ensuite une valeur plus approchée de x', par la méthode de *Newton*.

Les deux autres racines x'', x''' seront données par l'équation $x^2+xx'-p+x'^2=0$, comme ci-devant.

On trouve aussi les racines des équations des 2.me, 3.me et 4.me degrés par les lignes trigonométriques ; mais, ce moyen étant moins simple et moins expéditif que bien d'autres, nous ne le rapporterons pas ici (Voyez l'*Analise algébrique de Garnier*, pag. 257).

28. ***Racines égales.*** Elles sont le passage des racines réelles aux imaginaires : on a vu, dans le n.° 19, comment on les trouve : il est utile d'avoir, pour le troisième degré, des formules qui les donnent immédiatement.

Soit la proposée

$$x^3+ax^2+bx+c=0 ;$$

elle aura deux racines égales si (Voyez le n.° 43) on a la condition

$$27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)=0 .$$

Les deux racines égales seront

$$x''=x'''=-\frac{a}{3}\pm\tfrac{1}{3}[\sqrt{a^2-3b}] .$$

La racine inégale sera

$$x'=-\frac{a}{3}\mp\tfrac{2}{3}[\sqrt{a^2-3b}] .$$

Le signe supérieur a lieu quand la quantité $2a^3-9ab+27c$ est positive. Ce sont les signes inférieurs qui sont relatifs au cas où cette même quantité est négative.

Pour démontrer ces formules, il suffit de comparer, terme à terme, la proposée $X=0$, avec celle-ci,

$$(x-x')(x-x'')^2=0 .$$

Quant à la règle relative au double signe $\pm$, on la découvre en faisant disparaître le deuxième terme de la proposée qui devient de la forme $x^3+px+q=0$, et l'on a alors

$$x''=x'''=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}]=\pm\sqrt[2]{\frac{-p}{3}}] ;$$

et

$$x'=-\sqrt[3]{4q}]=\mp 2\sqrt[2]{\frac{-p}{3}}] ,$$

d'où l'on déduit aisément la règle du double signe.

29. *Construction graphique.* Les géomètres ont long-temps cherché les racines par des intersections de courbes : on en fait moins usage aujourd'hui, à cause du temps qu'exige leur description ; mais, on n'avait pas fait attention que la même courbe peut servir pour toutes

les équations du même degré, du moins pour le 3.me, le 4.me et le 5.me. J'ai fait, le premier, cette remarque utile dans mes *Opuscules*, pag. 116. Par ce perfectionnement, la méthode des courbes devient précieuse : elle est la plus expéditive de toutes ; elle donne les racines approchées à moins de $\frac{1}{100}$ près : la méthode rectifiée de *Newton* fournit ensuite le degré d'approximation dont on a besoin.

Soit la proposée

$$x^3+px+q=0\ ; \qquad (1)$$

je fais $x=lz$, et j'ai la transformée

$$l^3z^3+lpz+q=0\ , \qquad (2)$$

qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci

$$z^3=y\ , \qquad (3)$$

$$l^3y+lpz+q=0\ ; \qquad (4)$$

dont la première représente une parabole cubique, et la deuxième une ligne droite.

Il est évident que la parabole $z^3=y$ étant tracé sur un carton, si l'on construit, sur ce même carton, la droite de l'équation (4), les abscisses des points d'intersection seront les racines de la transformée (2), et la relation $x+lz$ donnera les racines de la proposée (1).

l est une constante indéterminée qui a pour objet d'empêcher que les points d'intersections de la parabole et de la droite ne tombent en dehors du carton : voici le moyen le plus simple d'obvier à cet inconvénient. On prendra pour l le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité : par ce moyen, toutes les racines de la transformée en z seront plus petites que l'unité. Si

Si donc, la plus grande abscisse AZ (fig. 7) a été prise pour l'unité, tous les points d'intersection seront compris dans les deux quarrés $AZBY$, $AZ'B'Y'$.

Quant à la manière de construire la droite de l'équation (4), elle est simple ; il suffit de chercher les points où elle coupe deux des quatre côtés du quarré, en faisant dans (4) successivement

$$z=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=1\ ,\quad y=1\ .$$

Remarquons encore qu'on peut éviter, pour diminuer l'étendue du carton, de construire la moitié AB' de la parabole, qui donne les racines négatives de z : en effet, après avoir trouvé les racines positives, il suffit de changer $+z$ en $-z$ dans (2), et les racines positives de la nouvelle transformée seront les négatives de l'équation (2) ; mais il faudra construire deux droites au lieu d'une.

Dans le carton que j'emploie, l'unité AZ a été faite de 200 millimètres et à chaque division on a mené l'ordonnée correspondante.

M. *Monge* (*Correspondance de l'école polytechnique*, an 1815) a donné une méthode qui ne diffère de la précédente qu'en ce qu'il n'emploie pas l'indéterminée l, ce qui exige une étendue beaucoup plus grande pour la courbe, et rend la méthode moins simple. Il doit m'être permis de faire observer que mes *Opuscules*, où la méthode est expliquée à peu près comme je viens de le faire, ont paru environ cinq ans avant l'article de M. *Monge* : sans doute cet habile géomètre m'aurait cité s'il avait connu mes *Opuscules*, puisqu'il a attaché assez d'importance à cet objet, pour faire graver des tableaux destinés à remplacer le carton.

30. *Table des racines.* Reprenons la proposée

$$x^3+px+q=0\ .$$

Si on fait $x=\frac{qz}{p}$, on aura, en posant $\frac{p^3}{q^2}=r$, la transformée

$$z^3+r(z+1)=0\ ;$$

cette équation n'ayant plus qu'une seule constante r, il est évident qu'en prenant pour r une série de nombres positifs, puis une autre série de nombres négatifs, on pourra chercher toutes les racines de z, correspondantes à tous les nombres des deux séries, et en former une table qui fera connaître les racines de la proposée par le moyen de la relation $x=\frac{qz}{p}$, en cette manière.

Soit proposé, par exemple,

$$x^3-2x+7=0\ ;$$

on a ici

$$p=-2\ ,\ q=7\ ,\ r=\frac{p^3}{q^2}=\frac{-8}{49}=-0{,}163\ .$$

Il n'y aura qu'à chercher, dans la table et dans la colonne de r, ce nombre $-0{,}163$, et l'on trouvera vis-à-vis, dans la colonne des racines, celles de z, qu'il ne s'agira plus que de multiplier par $\frac{q}{p}=\frac{-7}{2}$, pour avoir les racines cherchées de x.

Cette table, qui ne serait pas très-étendue, fournirait, sans contredit, le moyen le plus expéditif d'avoir les racines du troisième degré : il serait à désirer que quelque géomètre prît la peine de la calculer : il est à regretter qu'une table pareille ne puisse pas avoir lieu pour les autres degrés.

Quatrième degré.

31. *Méthode analitique.* 1.° Soit la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ; \qquad (1)$$

elle aura deux racines imaginaires et deux réelles, si la quantité

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)\ ,$$

est négative (Voyez le n.° 44).

Pour avoir les deux racines réelles x', x'' de la proposée, on posera

$$-\frac{p^2}{48}-\frac{r}{4}=p'\,;\ -\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{64}=q'\,;$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q'+\sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}}=A\,;\ \sqrt[3]{\frac{q'}{2}-\sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}}=B\,;$$

et l'on aura

$$x'=\pm\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$
$$\pm\sqrt{A+B-\frac{p}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,;$$
$$x''=\pm\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$
$$\mp\sqrt{A+B-\frac{p}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,,$$

le signe supérieur ayant lieu pour le cas de q négatif, et *vice versâ*. Pour le même cas, on aura les racines imaginaires x''', x^{IV}, par les formules suivantes :

$$x'''=\mp\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$
$$\pm\sqrt{A+B-\frac{p}{3}-\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,,$$
$$x^{\text{IV}}=\mp\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$
$$\mp\sqrt{A+B-\frac{p}{3}-\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,,$$

(*Analise de Garnier*, pag. 4, 217, 225).

2.° Les quatre racines de la proposée seront toutes imaginaires si l'on a les trois conditions

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)$$

positif ; p positif ; p^2-4r négatif (n.° 44) : on aura x', x'', x''', x^{IV}, par les quatre formules ci-dessus du 1.°

3.° *Cas irréductible.* Les racines seront toutes réelles si p est négatif et que p^2-4r soit positif, ainsi que

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2) \, .$$

Pour avoir les racines de la proposée, on cherchera celles u', u'', u''', de cette réduite

$$u^3+p'u+q'=0 \, ;$$

dans laquelle on a

$$p'=-\frac{p^2}{48}-\frac{r}{4} \, ; \quad q'=-\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{64} \, ;$$

ces racines, qui seront toutes réelles, se trouveront comme dans le n.° 27. On aura ensuite x', x'', x''', x^{IV}, par les formules générales suivantes,

$$x'=\pm\sqrt{\left[u'-\frac{p}{6}\right]}\pm\sqrt{\left[u''-\frac{p}{6}\right]}\pm\sqrt{\left[u'''-\frac{p}{6}\right]} \, ,$$

$$x''=\pm\sqrt{\left[u'-\frac{p}{6}\right]}\mp\sqrt{\left[u''-\frac{p}{6}\right]}\mp\sqrt{\left[u'''-\frac{p}{6}\right]} \, ,$$

$$x'''=\mp\sqrt{\left[u'-\frac{p}{6}\right]}\pm\sqrt{\left[u''-\frac{p}{6}\right]}\mp\sqrt{\left[u'''-\frac{p}{6}\right]} \, ,$$

$$x^{IV}=\mp\sqrt{\left[u'-\frac{p}{6}\right]}\mp\sqrt{\left[u''-\frac{p}{6}\right]}\pm\sqrt{\left[u'''-\frac{p}{6}\right]} \, .$$

Le signe supérieur répond au cas de q négatif, et *vice versâ.*

32. *Solution graphique.* En considérant la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0 \ , \qquad (1)$$

comme le résultat de l'élimination de y, entre deux équations du second degré en x et y, on pourra trouver les racines de cette proposée par les intersections de deux sections coniques, dont l'une constante sera tracée, à l'avance, sur un carton, et l'autre variable dépendra de la valeur des coefficiens de la proposée. Comme la ligne droite et le cercle sont plus faciles à tracer que les autres sections coniques, il est naturel et avantageux de les choisir pour courbes variables.

1.° En faisant, dans la proposée; $x=lz$ (l étant une constante indéterminée), elle devient

$$l^4z^4+pl^2z^2+qlz+r=0 \ . \qquad (2)$$

En faisant $l^2=p$ ou $l^2=-p$, suivant que p est positif ou négatif, on a

$$z^4 \pm z^2+\frac{q}{p\sqrt{\pm p}}z+\frac{r}{p^2}=0 \ ; \qquad (3)$$

qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci,

$$y=z^4 \pm z^2 \ , \qquad (4)$$

$$y+\frac{q}{p\sqrt{\pm p}}z+\frac{r}{p^2}=0 \ . \qquad (5)$$

Ayant donc tracé sur un carton les deux courbes de l'équation (4) qui serviront, l'une pour le cas de p positif; l'autre pour celui de p négatif, si l'on construit la droite variable de l'équation (5), les abscisses des points d'intersections de cette droite et de la parabole du quatrième degré (4), seront les racines de l'équation (3), et par conséquent la relation $x=z\sqrt{p}$ donnera les racines de la proposée.

Cette première méthode a l'inconvénient que les points d'intersections pourront quelquefois tomber en dehors du carton.

2.° La proposée étant toujours

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ; \qquad (1)$$

je fais $x=lz$, et il vient la transformée

$$l^4z^4+pl^2z^2+qlz+r=0,$$

que j'écris d'abord ainsi

$$l^4z^4+(pl^2-l^4)z^2+l^4z^2+qlz+r=0\ , \qquad (2)$$

et qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci

$$y=z^2\ , \qquad (3)$$

$$l^4y^2+(pl^2-l^4)y+l^4z^2+qlz+r=0\ , \qquad (4)$$

L'équation (3) représente une parabole du second degré, et l'équation (4) un cercle : en mettant celle-ci sous cette forme

$$\left(y+\frac{p-l^2}{2l^2}\right)^2+\left(z+\frac{q}{2l^3}\right)^2=\frac{(p-l^2)^2}{4l^4}+\frac{-q^2}{4l^6}-\frac{r}{l^4}\ , \qquad (4')$$

on reconnait que le cercle qu'elle représente a pour abscisse de son centre $\alpha=-\frac{q}{2l^3}$, pour ordonnée de ce centre $\beta=\frac{l^2-p}{2l^2}$, et pour rayon

$$R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\frac{r}{l^4}}\ .$$

Si donc on trace sur un carton (fig. 8) la parabole $y=z^2$, dans laquelle $AZ=1$, cette courbe servira à trouver les racines de

toute équation proposée du quatrième degré ; car, ayant décrit le cercle dont les coordonnées du centre sont α, $\mathit{6}$, et le rayon R les abscisses des points d'intersections seront les racines de l'équation (4), et la relation $x=lz$ donnera les racines de la proposée (1).

Il faudra prendre pour l un nombre tel que α, $\mathit{6}$, et les abscisses des points d'intersections ne tombent pas hors de la figure, ce qui sera toujours possible, en prenant l assez petit. Ordinairement, on pourra prendre pour l le plus grand coefficient de la proposée, pris positivement et augmenté de l'unité.

Remarque 1. S'il arrive que le cercle soit sensiblement tangent à la parabole, il y aura incertitude pour savoir si la proposée a deux racines égales ou deux imaginaires : dans ces cas rares, il faudra recourir à la méthode du chapitre III, ou bien, vérifier le doute par les formules du n.° 31, relatives aux conditions d'imaginarité : cette remarque s'applique aussi au troisième degré.

Remarque 2. On peut aussi trouver les racines de l'équation du troisième degré $x^3+px+q=0$, par la méthode du présent numéro ; car il suffit de faire $r=0$ dans les calculs précédens ; alors, l'une des quatre racines sera zéro et étrangère à la question ; les trois autres seront celles de la proposée.

Remarque 3. Les méthodes graphiques ont un grand avantage ; celui de faire distinguer d'un seul coup-d'œil les racines réelles, tant positives que négatives, et les racines imaginaires : je répète qu'elles sont plus expéditives que celles qui sont analitiques, à présent qu'on peut faire usage d'une courbe invariable, et que tout se réduit à placer une règle ou à faire tourner un compas. (Voyez mes *Opuscules*, pag. 111.)

33. *Racines égales.* Il sera utile de rapporter ici, comme nous l'avons fait pour le troisième degré, les formules relatives aux racines égales.

Soit la proposée

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ;$$

je la délivre du second terme, pour simplifier les formules, en faisant $x = u - \frac{a}{4}$, et j'ai une transformée de cette forme $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$: elle aura deux racines égales u''', u^{IV}, et deux inégales u', u'', si on a la condition

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)=0 ,$$

et l'on aura

$$u''' = u^{IV} = q \cdot \frac{12r+p^2}{8pr-9q^2-2p^3} ;$$

$$u' = -u''' + \sqrt{-p-2u'''^2} ; \qquad u'' = -u''' - \sqrt{-p-2u'''^2} :$$

u' et u'' ne seront réelles que dans le cas de p négatif et plus grand que $2u'''^2$.

Si la transformée a trois racines égales $u'' = u''' = u^{IV}$ et une autre u' inégale, on le reconnaîtra par la condition $p^2 + 12r = 0$ qui exige pour la réalité des racines que r soit négatif, ensuite on aura

$$u'' = u''' = u^{IV} = \pm\sqrt[2]{\frac{-p}{6}} = \pm\sqrt[4]{\frac{-r}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{8}}$$

et $u' = \mp 3u''$. Le signe supérieur a lieu quand q est positif, et *vice versâ*. Ces expressions des racines égales fournissent une condition plus simple que la précédente, savoir,

$$\sqrt[2]{\frac{-p}{6}} = \sqrt[4]{\frac{-r}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{q} .$$

Enfin, si $X=0$ avait deux couples ou deux racines doubles $x' = x''$ et $x''' = x^{IV}$, on le reconnaîtrait de suite par la transformée en u, dans laquelle on aurait

$$q = 0 ,$$

$$q=0\,,\ p^2=4r\,,\ u'=u''=+\sqrt{\frac{-p}{2}}\,,\ u'''=u^{\text{IV}}=-\sqrt{\frac{-p}{3}}\,.$$

L'équation en u, dans ce cas, devient $\left(u^2+\frac{p}{2}\right)^2=0$:

Les formules précédentes du quatrième degré s'obtiennent facilement en suivant la marche indiquée pour le troisième.

Cinquième degré.

34. *Construction graphique.* Le cinquième degré est susceptible d'une construction analogue à celle du n.° 32, relative au quatrième degré.

Soit la proposée,

$$x^5 \pm px^3 + qx^2 + rx + s = 0\ ;$$

en faisant $x=lz$, il vient

$$z^5 \pm \frac{pz^3}{l^2} + \frac{qz^2}{l^3} + \frac{rz}{l^4} + \frac{s}{l^5} = 0\ :$$

En faisant $l^2 = \pm p$ et $l = \sqrt{\pm p}$, on a

$$z^5 \pm z^3 + \frac{qz^2}{p\sqrt{\pm p}} + \frac{rz}{p^2} + \frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}} = 0,$$

(le signe supérieur correspond à p positif).

Cette équation peut être remplacée par le système de ces deux-ci,

$$y = z^5 \pm z^3\,, \qquad (1)$$

$$y + \frac{qz^2}{p\sqrt{\pm p}} + \frac{rz}{p^2} + \frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}} = 0, \qquad (2)$$

dont la première représente deux paraboles du cinquième degré (l'une pour le cas de p positif, et l'autre pour celui de p négatif), et la seconde une parabole du deuxième degré. La première est invariable et pourra être tracée sur un carton : elle sera double à cause du signe $\pm$: la parabole du deuxième degré est variable et dépend des coefficiens de la proposée : on a des instrumens pour la décrire par un mouvement continu. Si on met l'équation (2) sous cette forme

$$\left(z+\frac{r}{2q\sqrt{\pm p}}\right)^2=-\frac{p\sqrt{\pm p}}{q}\left(y+\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}-\frac{r^2}{4p^2q\sqrt{\pm p}}\right); \qquad (2')$$

on reconnait que l'abscisse α du sommet de l'axe de la parabole, lequel est parallèle aux y, est

$$\alpha=-\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}+\frac{r^2}{4p^2q\sqrt{\pm p}};$$

que l'ordonnée du même sommet est

$$\beta=-\frac{r^2}{2q\sqrt{\pm p}},$$

et que le paramètre est

$$-\frac{p\sqrt{\pm p}}{q}.$$

Il faut faire attention que l'axe de la parabole s'étend indéfiniment du côté des y positifs, si $\frac{p}{q}$ est négatif, et *vice versâ*.

Au moyen de ces expressions, il sera facile de tracer la parabole variable, dont les intersections donneront les différentes valeurs de z, lesquelles à leur tour feront connaitre les racines de la proposée par la relation $x=\sqrt{\pm p}.z$.

CHAPITRE V.

MÉTHODES MÉCANIQUES POUR TROUVER LES RACINES.

Les moyens mécaniques de trouver les racines ne doivent pas être considérés simplement comme des récréations mathématiques : ils offrent encore, s'ils sont bien conçus, un procédé expéditif pour avoir une première approximation des racines, du moins dans le plus grand nombre des cas.

On trouve, dans l'*Encyclopédie méthodique*, au mot équation, la description d'un constructeur universel des équations déterminées. Cet instrument, qui n'y est appliqué qu'aux équations du second degré, est déjà très-compliqué : il est aisé de voir que, pour les degrés supérieurs, la complication augmenterait au point de le rendre impraticable.

On trouve encore, dans le 17.me cahier du *Journal de l'école polytechnique*, une méthode fondée sur la considération des développantes du cercle, laquelle ne saurait remplir le but que l'on doit se proposer, l'économie du temps : d'ailleurs sa théorie est trop abstraite pour être à la portée du plus grand nombre des lecteurs.

J'ai décris, dans mes *Opuscules*, pag. 152, un nouvel instrument que j'ai appelé *balance algébrique*, et qui a paru, à plusieurs savans géomètres, réunir les qualités désirables, la simplicité et une précision suffisantes : je le rapporte ici avec quelques additions.

Enfin, je termine ce chapitre par l'exposition de deux nouveaux moyens qui ont l'avantage de n'exiger que quelques cartons que chacun peut tracer sans frais.

35. ***Balance algébrique.*** Soit

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+etc.=0\ ; \qquad (1)$$

l'équation proposée, dont je suppose les coefficiens numériques.

Je pose les équations

$$x=y',\ x^2=y'',\ x^3=y''',\ x^4=y^{IV},\ x^5=y^{V},\ etc.;$$

la proposée devient

$$a+by'+cy''+dy'''+ey^{IV}+fy^{V}+etc.=0\ . \qquad (2)$$

Supposons maintenant qu'ayant pris (fig. 9) $BD=Bd=1$, et ayant élevé la perpendiculaire $BA=1$, on mène les lignes AD, Ad, et qu'on construise de part et d'autre de AB les paraboles $AM''D$, $AM'''D$, $AM^{IV}D$.........$Am''d$, $Am'''d$, $Am^{IV}d$.........*etc.*, représentées par les équations $x^2=y''$, $x^3=y'''$, *etc.*, en prenant $AP=x$, $PM''=y''$, $PM'''=y'''$, $PM^{IV}=y^{IV}$.

Supposons ensuite que, dans l'équation (1), qui aura des termes négatifs, si elle a des racines réelles et positives, on ait transposé dans le second membre ces termes négatifs.

Supposons enfin qu'on ait placé dans les points Q, m', m'', m''', m^{IV}, et M^{IV}, M''', M'', M', *etc.*, des poids proportionnels aux coefficiens a, b, c, d, *etc.*: alors il est évident que si AB est un axe horizontal, il y aura équilibre autour de cet axe, entre les poids qui sont à gauche et ceux qui sont à droite, quand $AP=x$ sera une racine de la proposée.

Par exemple, si la proposée est

$$2+3x-4x^2+8x^3+9x^4=0\ ; \qquad (1')$$

je l'écris ainsi

$$2+3y'-4y''+8y'''+9y^{IV}=0\ ,$$

ou

$$2+3y'+8y'''+9y^{IV}=4y''\ . \qquad (2')$$

Je pose en Q un poids $=2$, en m' un poids $=3$, en m''' un

poids $=8$, en m^{IV} un poids $=9$, et en M'' un poids $=4$: il est aisé de sentir que la somme des momens des poids devant être égale de part et d'autre de l'axe AB, il y aura équilibre quand $AP=x$ sera une racine réelle positive de la proposée.

Imaginons maintenant qu'au moyen d'un mécanisme quelconque, une règle $M'm'$ fasse mouvoir les poids chacun sur la ligne droite ou courbe qui lui appartient (à l'exception du poids Q qui doit rester à la même place), l'équilibre aura lieu chaque fois que AP sera une racine positive.

36. *Remarques*. La description théorique qui précède a besoin de quelques développemens, tant pour la construction de l'instrument que pour son usage.

1.° Ce qui précède suppose que toutes les racines sont positives : il faudra donc, après avoir trouvé les positives, changer les signes des termes affectés des puissances impaires de x, et recommencer l'opération pour avoir les racines positives de la transformée, qui seront les négatives de la proposée.

2.° On a supposé encore que toutes les racines étaient comprises entre zéro et un : il faudra donc préparer la proposée, en y faisant $x=Lz$, L étant la limite supérieure positive de la proposée. (Voy. le n.° 18.) Ayant trouvé les racines de la transformée en z, on aura celles de la proposée par la relation $x=Lz$.

3.° Ce qui précède suffit pour la théorie, mais non pour la pratique. Les paraboles sont des fentes dans lesquelles doivent glisser des fils métalliques, dont chacun porte un petit vase destiné à recevoir les poids : ceux de ces vases qui correspondent aux termes de l'équation proposée, contiennent des poids proportionnels aux coefficiens ; les autres vases sont vides : tous ces fils sont mis en mouvemens par une règle $M'm'$, percée d'une rainure, et garnie d'un vernier qui parcourt la ligne AB.

On sent que les fentes paraboliques ne sauraient être prolongées jusqu'aux points A, D, d, où elles se confondraient : il est donc nécessaire d'éloigner de ces points les racines de l'équation. Pour

cela, on remarquera que L étant la limite supérieure positive de la proposée, si on y met Lz pour x, toutes les racines positives de la transformée seront comprises entre 0 et $+1$; que si, dans l'équation en z, on met $\frac{10}{4}z$ ou $\frac{5}{2}z$ pour z, les racines positives de cette seconde transformée seront toutes comprises entre 0 et 0,4; qu'enfin, si, dans cette seconde transformée, on met $z-0,5$ pour z, on aura une troisième transformée dont les racines positives seront comprises entre 0,5 et 0,9.

Il suit de là qu'en mettant dans la proposée $\frac{5L}{2}(z-0,5)$ pour x, on aura, d'un seul coup, une transformée en z, dont toutes les racines positives seront comprises entre 0,5 et 0,9, et tomberont par conséquent assez loin des points A, D, d, où les courbes se confondent.

Cette préparation préalable a un autre avantage, c'est que près du point A les racines ne sauraient être déterminées avec le même degré d'approximation, que loin de ce point.

Quant aux dimensions de l'instrument, si le plan $EFfe$, qui a la forme d'un trapèze, est en bois, on fera $AB=50$ centimètres; d'où $Ff=90$, $Ee=50$, $HI=20$; mais si l'instrument est en cuivre il suffira de faire $AB=25$, ce qui reduira à la moitié les autres dimensions.

Le trapèze $EFfe$ porte deux tourrillons en H et I qui tournent dans deux crapaudines que portent deux montans verticaux.

4.° Lorsque la règle mobile $M'm'$ approche d'une racine, les deux bras de la balance approchent aussi de l'équilibre : au-delà de la racine, le bras qui était le plus pesant devient le plus léger : il n'en est pas ordinairement de même si la règle rencontre deux imaginaires; le bras qui était d'abord le plus pesant, perd, jusqu'à un certain point, une portion de sa préponderance, puis, passé ce point, la reprend par degré.

Si la règle rencontre deux racines égales, le bras qui avait la prépondérance, la perd peu à peu, jusqu'au moment de l'équilibre, puis la reprend par degrés insensibles.

Par ces caractères, on pourra presque toujours distinguer les racines imaginaires et les racines égales; mais, il est un cas où l'instrument ne sera pas assez sensible, et où il faudra recourir aux méthodes des chapitres III et VI; c'est celui où l'axe de la courbe $X=y$ (fig. 3, 4, 5) s'approche très-près d'un sommet: alors on pourra confondre deux racines réelles inégales et très-voisines, avec deux racines égales, ou avec deux racines imaginaires.

Enfin, si la courbe $X=y$ a des ordonnées *minima* ou de sommet convexe imaginaire, ce qui arrive quand la première dérivée de $X=0$ a des racines imaginaires; alors le même bras conserve sa prépondérance avant et après la rencontre de l'ordonnée *minima* imaginaire, et l'instrument ne manifeste point l'existence des racines imaginaires. (La figure 6 offre un exemple de ce cas.)

5.° Le plan de l'instrument pourrait être vertical, et alors l'état d'équilibre serait indiqué par un fil à plomb suspendu en I, qui coïnciderait avec IH.

37. *Exemple.* Soit proposé

$$x^4+x^3-x^2-2x-2=0 \text{ . (*)}$$

La limite supérieure positive L de cette équation serait 3, d'après la règle du n.° 18; mais, comme il est important de la diminuer, je fais $L=2$, et je vérifie ce nombre 2 en mettant $2-x$ pour x, car, la transformée n'ayant plus que des variations, m'apprend que toutes ses racines sont positives.

Je fais donc, conformément à la remarque 3.° du numéro précédent,

$$x=5(z-0,5);$$

et il vient la transformée

(*) Ou $(x^2-2)(x^2+x+1)=0$.

$$625z^4-1125z^3+725z^2-203,75z+20,1875=0,$$

ou simplement

$$625z^4-1125z^3+725z^2-204z+20=0,$$

ou encore

$$62,5z^4-112,5z^3+72,5z^2-20,4z+2=0;$$

Soumettant cette équation à l'épreuve de la balance, on trouve que l'équilibre a lieu en un seul point, celui où l'index de la règle mobile marque 0,78 : donc $z=0,78$ et $x=1,4$. Au-delà de ce point, celui des deux bras de la balance qui avait la prépondérance, la perd et ne la reprend plus ; d'où l'on conclut que la dérivée de $X=y$ a deux racines imaginaires.

Il reste à trouver les racines négatives de la proposée : pour cela, je change $+x$ en $-x$, et elle devient

$$x^4-x^3-x^2+2x-2=0;$$

L vaut encore ici 2, et je fais

$$x=5(z-0,5);$$

il vient la transformée

$$625z^4-1375z^3+1100z^2-371,25z+41,4375=0,$$

ou simplement (pour se borner à des poids représentés par 3 chiffres)

$$62,5z^4-137z^3+110z^2-37,1z+4,1=0.$$

Soumettant cette équation à la balance, on trouve que l'équilibre n'a lieu que dans un point, celui où l'index marque 0,78 : donc $z=0,78$, et x ou la racine négative $=-1,4$: donc aussi la proposée a deux racines imaginaires.

38.

38. *Autre système de balance.* *BbeE* (fig. 10) est un rectangle dans lequel $Bb=2=50$ centimètres est divisé en 200 parties égales numérotées de part et d'autre du milieu o ; la parallèle *Cc* est divisée depuis le milieu vers *C* et *c*, en faisant dans $y=x^2$ successivement $x=0{,}1$, $x=0{,}2$.......: les valeurs de y donnent les distances respectives de chaque point à la ligne oo du milieu.

La parallèle *Dd* a été divisée de même d'après l'équation $y=x^3$, en faisant $x=0{,}1$, $x=0{,}2$.......

La parallèle *Ee* a été divisée aussi d'après l'équation $y=x^4$.

Il faut imaginer d'autres parallèles *Ff*, *Gg*....... divisées d'après les équations $y=x^5$, $y=x^6$,.......

Les points correspondans de toutes les parallèles sont joints par des courbes 10—10, 20—20, 30—30, etc.

Toutes les parallèles sont des fentes dans lesquelles se meuvent les fils qui portent les poids : ces fils doivent être tous placés sur la même courbe, ce qui ne peut s'exécuter qu'à la main : on les fait glisser d'une courbe à la suivante, jusqu'à ce qu'on ait trouvé l'équilibre autour de l'axe horizontal oo qui repose sur deux montans verticaux : si alors les fils sont sur la courbe 30, la racine indiquée est $x=0{,}30$; et ainsi des autres cas.

Par ce système de balance, on évite l'inconvénient du premier où les fentes se confondent près des points *A*, *D*, *d*. (fig. 9.)

Il reste à préparer l'équation proposée pour que toutes les racines tombent entre o et $+1$, en faisant $x=Lz$. (*L* étant la limite supérieure positive de la proposée.) Pour avoir les racines négatives, on change $+x$ et $-x$, et l'on recommence l'opération.

Comme les courbes voisines de l'axe donnent peu d'approximation ; il est plus avantageux de faire

$$x=2L(z-0{,}5)=L(2z-1)\ ,$$

afin que les racines de la transformée en z tombent entre $\frac{1}{2}$ et $+1$: on trouve ensuite les négatives en changeant préalablement $+x$ en $-x$.

Enfin, si l'on voulait avoir, par une seule opération, toutes les racines tant positives que négatives, en appelant L' la limite supérieure négative de la proposée, on ferait

$$x=L-2(L+L')(z-0,5)=2L+L'-2(L+L')z\,.$$

Toutes les racines de la transformée en z seraient positives et comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1; mais, ce second moyen a l'inconvénient de fournir des coefficiens trop gros et qui diminuent l'exactitude des résultats.

Je remarquerai encore qu'au lieu des poids variables, on pourrait employer des poids constans; mais l'instrument deviendrait plus compliqué et moins exact.

39. *Triangles algébriques.* On peut, au moyen de quelques cartons que chacun peut construire sans frais, remplir le même objet que par la balance précédente.

$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, *etc.* (fig. 11, 12, 13, etc.) sont des triangles rectangles isocèles en carton, dont les côtés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,...., sont divisés en 100 ou 1000 parties égales: les autres côtés B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3,......., égaux à l'unité, sont divisés de manière que les distances de chaque point au point B sont les ordonnées des courbes

$$y=x\,,\quad y=x^2\,,\quad y=x^3\,.......,$$

en faisant successivement

$$x=0,1\,,\quad x=0,2\,,\quad x=0,3\,,$$

Enfin, des points A_1, A_2, A_3 etc., on a mené des droites à tous les points de division de B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3........

Voici un exemple qui suffira pour faire comprendre l'usage de ces cartons. Je prends l'exemple du n.° 37,

$$x^4+x^3-x^2-2x-2=0\,.$$

Je fais $x=2L(z-\frac{1}{2})$ afin que toutes les racines positives soient comprises entre $\frac{1}{2}$ et $+1$. On a ici $L=2$, et la transformée est

$$128z^4-224z^3+136z^2-36z+3=0\ ,$$

ou en divisant par le plus grand coefficient 224, et transposant

$$0{,}571z^4+0{,}607z^2+0{,}013=z^3+0{,}161z\ .$$

Je prends (fig. 11, 12, 13, 14)

$$A_1H_1=0{,}161\ ,\ A_2H_2=0{,}607\ ,\ A_3H_3=1=A_3B_3\ ;\ A_4H_4=0{,}571\ ;$$

je pose la ligne IH_2 sur IH_4 : je pose de même la ligne IB_3 du carton fig. 13 sur la ligne IH_1 : je fais glisser le carton fig. 14 sur le carton fig. 12, et le carton fig. 13 sur celui de la fig. 11, jusqu'à ce que $IH_4+IH_2+0{,}013$ donne la même longueur que IH_1+IB_3, les points I étant tous pris sur les transversales de même numéro : je trouve que l'égalité a lieu pour les transversales du n.° 85 ; d'où je conclus que $z=0{,}85$, et par conséquent $x=1{,}4$, (à cause de $x=2(2z-1)$).

Cela est fondé sur ce que la ligne $B_1 85$, valant z, la ligne IH_1 vaut $0{,}161z$: de même

$$B_3 85=z^3\ ,\quad IH_2=0{,}607z^2\ ,\quad IH_4=0{,}571z^4\ .$$

Au reste, on sent que le degré d'exactitude sera d'autant plus grand que les cartons seront eux-mêmes plus grands, et que le plus petit nombre de l'équation approchera plus de l'unité.

On sent encore que ce que nous avons dit précédemment des racines négatives, égales et imaginaires s'applique à la méthode du présent numéro.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES IMAGINAIRES D'UNE ÉQUATION D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

LE problème qui fait l'objet de ce chapitre est très-important : malgré une longue suite d'efforts, on n'en a que des solutions ou incomplètes, ou impraticables. (Voyez le n.° 13.) La suivante paraît devoir terminer heureusement cette branche de l'analise.

40. Il suit de la sixième remarque du n.° 15, que les y *minima* ont une corrélation nécessaire avec le nombre des racines imaginaires, et que, par conséquent, l'équation qui donnerait toutes les valeurs de y *maxima* ou *minima*, ferait connaître, par la succession de ses signes, les racines imaginaires, en discutant, pour chaque degré, les différens cas qu'il présente.

Cette équation en y, que je représente par $Y=0$, et que j'appellerai équation des sommets ou équation des racines imaginaires, est facile à former ; en effet, on a, pour caractériser les sommets, l'équation $X'=\frac{dy}{dx}=0$: il suffit donc, pour avoir $Y=0$, d'éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$: l'équation résultante en y sera du degré $m-1$.

Voyons maintenant comment l'équation $Y=0$ peut faire connaître les racines imaginaires : un coup-d'œil sur les figures 2, 3, 4, 5 suffira. Nous conviendrons d'appeler positif l'espace qui est en dessus de l'axe des x, et négatif celui qui est en dessous.

Dans la figure 2, relative au deuxième degré, $Y=0$ sera du premier degré et de la forme $y+A=0$. Dans le cas de deux racines imaginaires, A sera négatif ou y positif, ou bien encore $y+A=Y=0$ n'aura que des variations de signe, d'après la règle de *Descartes*.

Pour le troisième degré (fig. 3), $Y=0$ sera de la forme

$$y^2+Ay+B=0\ ;$$

dans le cas de deux racines imaginaires, l'axe des x aura une des deux positions O_1 ou O_2 et ne rencontrera la courbe qu'en un point: les deux valeurs de y seront ou toutes deux positives, ou toutes deux négatives; c'est-à-dire que $Y=0$ aura ou deux variations, ou zéro variation.

Ces deux exemples suffisent pour faire voir comment il faut discuter les degrés plus élevés, et comment les signes de l'équation $Y=0$ dépendent de la position de l'axe des x, laquelle, à son tour, détermine le nombre des imaginaires. Un examen attentif m'a fait apercevoir la loi de cette relation qu'on peut exprimer par le théorème suivant.

Théorème sur les racines imaginaires.

41. $X=0$ étant une équation du degré m, et $X'=0$ sa dérivée du premier ordre, si on élimine x entre $X=y$ et $X'=0$, on aura, en y, une équation $Y=0$ du degré $m-1$, dont les racines y'; y'', y'''....... sont les ordonnées *maxima* et *minima* de la courbe $X=y$: cela posé, on aura, entre les signes de l'auxiliaire $Y=0$, et les racines imaginaires de la proposée $X=0$, la correspondance que voici :

1.° m étant pair, $X=0$ n'ayant pas de racines égales, aura $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots\ldots. m$, racines imaginaires, suivant que $Y=0$, aura

$$\frac{m}{2}\,,\quad \frac{m}{2}\pm 1\,;\quad \frac{m}{2}\pm 2\,,\quad \frac{m}{2}\pm 3\ldots\ldots 0\,;$$

permanences de signe.

2.° m étant impair, $X=0$ n'ayant pas de racines égales ; aura 0, 2, 4, 6..........$m-1$, racines imaginaires, suivant que $Y=0$ aura

$$\frac{m-1}{2}\,,\quad \frac{m-1}{2}\pm 1\,,\quad \frac{m-1}{2}\pm 2\,,\quad \frac{m-1}{2}\pm 3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}\pm\frac{m-1}{2}\,;$$

permanences.

3.° $Y=0$ aura 1, 2, 3, etc., termes nuls, à commencer par celui qui est constant, suivant que $X=0$ aura une racine double, deux doubles ou une triple, trois doubles ou une quadruple, etc.

Ce théorème renferme une solution aussi simple que complète du problème des racines imaginaires : il réduit la difficulté à celle de trouver les racines égales ; puisque la même équation $Y=0$ donne, à la fois, les unes et les autres : nous osons croire que sa découverte est un grand pas en algèbre : nous verrons plus bas qu'il conduit encore à la solution d'un autre problème du même genre, celui de distinguer les racines positives des négatives ; enfin, il est d'une application facile, et les formules qu'on en déduit peuvent trouver place dans les livres élémentaires. La table suivante, qu'il serait facile de prolonger, présente, pour les dix premiers degrés, la marche de la loi exprimée par le théorème.

Table des racines imaginaires de $X=0$,
Correspondantes aux permanences de $Y=0$.

Degré de $X=0$	Imagin.es de $X=0$	Permanences de $Y=0$
2	0	1
	2	0
3	0	1
	2	0 ou 2
4	0	2
	2	1 ou 3
	4	0
5	0	2
	2	1 ou 3
	4	0 ou 4
6	0	3
	2	2 ou 4
	4	1 ou 5
	6	0
7	0	3
	2	2 ou 4
	4	1 ou 5
	6	0 ou 6

Degré de $X=0$	Imagin.es de $X=0$	Permanences de $Y=0$
8	0	4
	2	3 ou 5
	4	2 ou 6
	6	1 ou 7
	8	0
9	0	4
	2	3 ou 5
	4	2 ou 6
	6	1 ou 7
	8	0 ou 8
10	0	5
	2	4 ou 6
	4	3 ou 7
	6	2 ou 8
	8	1 ou 9
	10	0

L'usage de cette table est simple : si, par exemple, la proposée $X=0$ est du huitième degré, on voit, par la table, qu'elle aura six imaginaires si $Y=0$ a une permanence ou sept permanences.

C'est le moment de prévenir une objection. Le théorème précédent est d'une évidence manifeste lorsque la courbe $X=y$ a toutes ses branches; mais, il peut arriver qu'elle en perde quelques-unes, et même que $Y=0$ n'ait que des racines imaginaires : dans ce cas, le théorème ne sera-t-il pas en défaut ? l'expérience prouve que non. Il faut faire attention que, dans notre méthode, ce ne sont pas les valeurs absolues des y *minima* ou *maxima* qu'on emploie; mais seulement les rapports numériques du nombre des y *maxima* aux y *minima*; c'est-à-dire, les positions respectives de ces deux espèces d'ordonnées de signe contraire : or, on peut bien comparer des quantités imaginaires sous le point de vue de leur position, sans connaître leur grandeur absolue ; c'est pour cela que la loi qui lie les signes de $Y=0$ aux racines imaginaires de $X=0$, ne cesse pas d'avoir lieu quand $Y=0$ a des imaginaires. Au reste, c'est ici un fait d'analise qu'il serait sans doute difficile, mais non impossible, de démontrer par le calcul.

Règles déduites du théorème pour les six premiers degrés.

42. Quoique la formation de l'auxiliaire $Y=0$ soit facile, il est encore plus commode pour la pratique d'effectuer les calculs sur les équations littérales des premiers degrés, afin d'en déduire des formules qui dispensent de former l'équation $Y=0$ pour chaque équation numérique proposée. Passé le sixième degré, les éliminations en lettres deviennent trop compliquées, et d'ailleurs les substitutions à faire dans des formules littérales seraint plus longues que l'élimination elle-même entre deux équations numériques.

2.me *Degré.* Soit la proposée

x^2

$$x^2+ax+b=0=X:$$

on a

$$X'=2x+a=0.$$

éliminant x entre $X'=0$ et $X=y$, on trouve, pour $Y=0$, celle-ci

$$4y+a^2-4b=0;$$

donc, d'après la table, la proposée aura deux racines imaginaires si $4y+a^2-4b=0$ n'a point de permanences; c'est-à-dire, si a^2-4b est négatif, ou bien si $4b>a^2$, ce que l'on savait.

43. 3.me *Degré.* Soit la proposée

$$X=x^3+ax^2+bx+c=0.$$

On a

$$X'=3x^2+2ax+b.$$

Éliminant x entre $X'=0$ et $X=y$, on trouve, pour $Y=0$, celle-ci

$$27y^2+2(9ab-2a^3-27c)y+27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)=0=Y.$$

Donc, d'après la table, la proposée $X=0$ aura deux racines imaginaires, si l'auxiliaire $Y=0$ a zéro ou deux permanences. Comme dans ces deux cas le terme constant doit être positif, il s'ensuit que la condition de deux racines imaginaires est que la quantité

$$27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)$$

soit positive.

44. 4.me *Degré.* Soit la proposée

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0:$$

on a

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0.$$

Pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite dans $X=y$ la valeur de x^3, tirée de $X'=0$, ce qui donne l'équation (1) ci-après : en combinant (1) avec $X'=0$, on a l'équation (2)

$$(3a^2-8b)x^2+(2ab-12c)x+ac-16d+16y=0 \qquad (1)$$

$$(9a^3-32ab+48c)x^2+(6a^2b-16b^2-4ac+64d)x+c(3a^2-8b)-64xy=0. \quad (2)$$

Celles-ci étant traitées à la manière ordinaire, on trouve, pour $Y=0$, en posant

$$A=-192ac-128b^2+144a^2b-27a^4\ ;$$

$$B=2(-3a^2c^2+9a^3bc-40ab^2c+72bc^2-2a^2b^3+8b^4)\ ;$$

$$C=c^2(-4a^3c+18abc+a^2b^2-27c^2-4b^3)\ ,$$

celle-ci

$$256y^3-(768d+A)y^2+(768d^2+2Ad+B)y-256d^3-Ad^2-Bd-C=0. \quad (Y)$$

Maintenant, d'après la table du n.° 41, la proposée $X=0$, aura deux racines imaginaires si $Y=0$ a une ou trois permanences : la proposée aura quatre imaginaires si $Y=0$ a zéro permanence, c'est-à-dire, trois variations.

Ces conditions peuvent être énoncées comme il suit.

En écrivant, pour abréger $Y=0$, de cette manière,

$$y^3+A'y^2+B'y+C'=0\ ,$$

on remarquera que tous les cas d'une ou trois permanences qui donnent deux imaginaires, sont compris dans les combinaisons suivantes,

$$y^3+y^2+y+1=0\ , \quad y^3+y^2-y+1=0\ ,$$

$$y^3-y^2+y+1=0\ , \quad y^3-y^2-y+1=0\ ,$$

dans lesquelles le dernier terme demeure seul constamment positif : donc, la proposée $X=0$ aura deux racines imaginaires si C' est positif.

A l'égard du cas de quatre racines imaginaires, lequel est unique, il est évident que les conditions sont

$$A'<0\ ,\quad B'>0\ ,\quad C'<0\ .$$

Les formules de cet article deviennent bien plus simples quand la proposée n'a pas de deuxième terme.

45. 5.me *Degré*. Soit la proposée

$$X=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ ;$$

on a

$$X'=5x^4+4ax^3+3bx^2+2cx+d=0\ :$$

pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite, dans $X=y$, la valeur de x^4 tirée de $X'=0$, et il vient

$$(10b-4a^2)x^3+(15c-3ab)x^2+(20d-2ac)x25(e-y)-ad=0\ . \quad (1)$$

Combinant celle-ci avec $X'=0$, on a

$$(16a^3-55ab+75c)x^3+(12a^2b-10ac-30b^2+10d)x^2$$
$$+(8a^2c-5ad-20bc+125e-125y)x-d(10b-4a^2)=0\ . \quad (2)$$

Je continue sur (1) et (2) l'élimination suivant la méthode de *Bezout* : c'est la meilleure que je connaisse, la seule qui n'introduise pas de racines étrangères : celle qui est fondée sur le plus grand commun diviseur, n'est pas exempte de ce défaut : il est vrai qu'on a cherché à l'en délivrer ; mais pourquoi combattre des difficultés qu'on peut éviter ?

Ayant écrit (1) et (2) comme il suit,

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0\ ,\ A'x^3+B'x^2+C'x+D=0\ ;$$

et ayant posé

$$A'B-AB'=E\ ,\ \ A'C-AC'=F\ ,\ \ A'D-AD'=G\ ;$$

$$B'D-BD'=H\ ,\ \ C'D-CD'=I\ ,\ \ B'C-BC'=K\ ,$$

on aura, pour l'équation $Y=0$, celle-ci

$$G(G^2+EI+GK-2FH)+I(F^2-EK)+EH^2=0. \qquad (Y)$$

46. 6.me *Degré.* Soit la proposée

$$X=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\ ;$$

on a

$$X'=6x^5+5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=0\ .$$

Pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite dans $X=y$ la valeur de x^5, tirée de $X'=0$, et j'ai

$$(12b-5a^2)x^4+(18c-4ab)x^3+(24d-3ac)x^2+(30e-2ad)+x36(f-y)-ae=0. \quad (1)$$

Combinant la dernière avec $X'=0$, on a celle-ci

$$(25a^3-84ab+108c)x^4+(20a^2b-18ac-48b^2+144d)x^3$$

$$+(180e-12ad-36bc+15a^2c)x^2+(216f216y-6ae-24bd+$$

$$+10a^2d)x+e(5a^2-12b)=0\ . \qquad (2)$$

J'élimine x entre (1) et (2), suivant la méthode de *Bezout*; je les écris d'abord comme il suit :

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0\,,$$

$$A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'=0\,;$$

puis faisant pour abréger

$$A'B-AB'=a_1\,,\quad A'C-AC'=b_1\,;\quad A'D-AD'=c_1\,;$$

$$A'E-AE'=d_1\,,\quad B'C-BC'+A'D-AD'=e_1\,,$$

$$A'E-AE'+B'D-BD'=f_1\,,\quad B'E-BE'=g_1\,,$$

$$B'E-BE'+C'D-CD'=h_1\,,\quad C'E-CE'=i_1\,,$$

$$D'E-DE'=k_1\,,$$

on trouve

$$d_1(-d_1e_1h_1+2b_1g_1h_1-2b_1f_1i_1+d_1f_1^2-2c_1f_1g_1+2c_1e_1i_1)+g_1$$

$$(-a_1g_1h_1+2a_1f_1i_1-2b_1c_1i_1+c_1^2g_1)+i_1(-a_1e_1i_1+b_1^2i_1)$$

$$+k_1(a_1e_1h_1-b_1^2h_1+2b_1c_1f_1-a_1f_1^2-c_1^2e_1)=0=Y\,;$$

47. On voit, par ce qui précède, que la formation de $Y=0$, n'exigera jamais que l'élimination de x entre deux équations du degré $m-2$. Il est même possible d'abaisser d'un degré ces deux équations.

Soit, en effet, la proposée

$$X=x^7+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\,,$$

qu'on a délivré de son deuxième terme. On formera sa réciproque en faisant $x=\frac{1}{u}$, laquelle aura le même nombre de racines imaginaires : elle sera

$$fu^7+eu^6+du^5+cu^4+bu^3+au^2+1=0=U ;$$

sa dérivée sera

$$7fu^6+6eu^5+5du^4+4cu^3+3bu^2+2au=0=U' .$$

Pour éliminer u entre $U'=0$ et $U=y$, on remarquera que $U'=0$ donne $u=0$, d'où $y=1$: ainsi, $y-1$ est un des facteurs de $Y=0$: par là $U'=0$ est abaissée d'un degré, et l'élimination de u ne donnera plus, pour $Y=0$, qu'une équation du cinquième degré, ou du degré $m-2$; laquelle étant multipliée par le facteur $y-1$, sera l'équation cherchée en y.

48. Il est bon de remarquer que si $X=0$ a des racines égales, on s'en apercevra en ce que un ou plusieurs termes de $Y=0$ seront nuls, ce qui abaissera cette équation, et l'on déterminera, d'après la table du n.° 41, le nombre des racines imaginaires qu'indique cette équation abaissée : ainsi, la circonstance des racines égales dans la proposée n'apporte aucun changement dans l'emploi de notre méthode ; tandis qu'elle est un grand obstacle dans celle de M. *Cauchy*, comme on le verra.

Nous terminerons ce chapitre par deux applications numériques.

Soit proposée

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+2=0 ;$$

on trouve que le dernier terme C' de $Y=0$ du n.° 44, relatif au quatrième degré, est positif ; d'où l'on conclut, tout de suite, que la proposée a deux racines imaginaires : en effet, elle est le produit de

$$(x+2)(x+1)(x^2+1)=0 .$$

Soit encore proposé

$$x^6-x^4+2x^3+1=0 ;$$

on a

$$X'=6x^5-4x^3+6x^2=0 ;$$

ici $X'=0$ a deux racines $x=0$, $x=0$, qui, étant mises dans $X=y$, donnent les deux facteurs $y-1=0$, $y-1=0$: il reste donc à éliminer x entre $X=y$ et $3x^3-2x+3=0$: cette élimination donne

$$27y^3+8.27y^2-956y+713=0\ ,$$

qui, étant multipliée par $(y-1)^2$, devient

$$(y-1)^2(27y^3+8.27y^2-956y+713)=0\ ;$$

c'est l'équation cherchée $Y=0$. Sans qu'il soit besoin d'exécuter la multiplication, on voit qu'elle n'a qu'une permanence, et la table du n.° 41 (case du 6.me degré) fait connaître que la proposée a quatre racines imaginaires : en effet, elle est le produit de

$$(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)=0\ .$$

CHAPITRE VII.

DISTINCTION DES RACINES RÉELLES EN POSITIVES ET NÉGATIVES.

49. Ce chapitre est presque aussi important que le chapitre VI, dont il est le complément. Après avoir determiné le nombre des racines imaginaires, par le chapitre VI, on connait, par une simple soustraction, celui des racines réelles; mais il reste à distinguer celles-ci en positives et négatives.

Il faut d'abord remarquer qu'un facteur imaginaire du deuxième degré, étant toujours de l'une de ces deux formes

$$x^2+2ax+a^2+\beta^2 \;, \quad x^2-2ax+a^2+\beta^2 \;,$$

sa multiplication, par un polynôme réel y, ne peut introduire, dans le polynôme résultant X, que deux permanences ou deux variations de plus que n'en contenait le polynôme y; mais jamais une variation et une permanence.

Ce lemme, combiné avec la règle de *Descartes*, suffit pour assigner le nombre des racines positives et celui des négatives, dans beaucoup de cas pour tous les degrés, et dans tous les cas pour les sept premiers degrés, hors un seul pour lequel le doute est levé par une règle très-simple, deduite d'un théorème ci-après.

Après avoir exposé ce théorème, je donnerai les règles relatives aux sept premiers degrés, et, pour compléter la matière, j'exposerai ensuite une méthode générale, à laquelle on pourra recourir, dans les

les cas douteux des degrés supérieurs, au septième, qui échappent à la première méthode.

Théorème nouveau sur les signes des racines réelles.

50. Lorsque dans une équation

$$x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}+\ldots\ldots\ldots=0\ ;$$

on connait le nombre des racines imaginaires; s'il arrive que par la règle de *Descartes* on ne puisse discerner complètement le nombre des racines réelles positives et celui des négatives, en sorte qu'il en reste deux douteuses et de même signe; alors on pourra affirmer que ces racines douteuses sont toutes deux positives, si la quantité

$$(m-1)^2a^3-m(3m-4)ab+3m^2c\ldots\ldots\ldots(F)$$

est négative, et, au contraire, qu'elles sont toutes deux négatives si cette quantité (F) est positive.

Avant de démontrer ce théorème, il faut voir dans quels cas il trouve son application. On démontre facilement qu'une équation $X=0$, qui a tous ses termes, fournit un nombre 2^m de combinaisons de ses signes, le premier demeurant positif : ainsi, par exemple, le deuxième degré fournit les quatre combinaisons

$$x^2+ax+b=0\ ,\ x^2-ax-b=0\ ,\ x^2+ax-b=0\ ,\ x^2-ax+b=0\ .$$

Il semblerait, d'après cela, qu'en formant une table des combinaisons de chaque degré, chaque équation proposée devrait y trouver sa place : la conclusion serait vraie sans la circonstance des racines imaginaires qui introduisent des cas douteux, à partir du quatrième degré.

Soit proposé, par exemple,

$$x^4+x^3-5x^2-7x+10=0 \; ,$$

et

$$x^4+3x^3-2x^2-2x+12=0 \; ,$$

dans lesquelles on a reconnu, par le chapitre VI, deux racines imaginaires : ces deux équations ont chacune deux variations et deux permanences : on est assuré, par le lemme du n.° 49 et par le signe du terme connu, que dans chacune les deux racines réelles sont de même signe : il s'agit de distinguer ce signe qui n'est pas le même pour toutes deux : en effet, la première vient de

$$(x-1)(x-2)(x^2+4x+5)=0 \; ,$$

et la deuxième de

$$(x+2)(x+3)(x^2-2x+2)=0 \; .$$

Dans ces deux équations, l'origine des x est placé (fig. 4) en A sur quelque point de l'axe O, A, qui laisse un sommet en dessous et deux en dessus, et deux intersections de la courbe du même côté ; mais, dans la première, la région des x positifs est à droite de A, et dans la seconde la région positive est à gauche ; ou bien, dans le deuxième cas, la figure est renversée de droite à gauche (fig. 4*).

Le théorème précédent lève le doute ; car, pour la première équation, on a

$$F=9a^3-32ab+48c=-167 \; ,$$

et les deux racines sont positives (fig. 4), tandis que, pour la deuxième équation, on a

$$F=9a^3-32ab+48c=339 \; ,$$

ce qui indique deux racines négatives (fig. 4*).

51. *Démonstration du théorème.* Soit la proposée

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

et sa dérivée

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0\ ;$$

dans le cas où $X=0$ contient deux racines imaginaires, et où d est positif, la courbe $X=y$ a deux sommets en dessus de l'axe, et un en dessous; c'est-à-dire que (fig. 4) y *maximum* a trois valeurs y_1, y_2, y_3, dont deux positives et une négative, auxquelles correspondent trois abscisses x_1, x_2, x_3, qui sont les racines de $X'=0$: il est évident que la question consiste à savoir quel est le signe de la racine de $X'=0$ qui correspond à y *maximum* négatif ou qui rend X négatif ; car, il est clair que les deux racines réelles de $X=0$ sont de même signe que celles de $X'=0$ qui est intermédiaire.

Dans le n.° 44, nous avons trouvé, entre les x et les y des sommets, la relation (2) que j'écris ainsi

$$64y=(9a^3-32ab+48c)x+(6a^2b-16b^2-4ac+64d)+\frac{c}{x}(3a^2-8b)\ ;$$

or, il est clair qu'en prenant x suffisamment grand, le signe du deuxième membre ne dépendra que de celui du premier terme, et qu'en prenant x, de signe contraire à celui de son coefficient

$$9a^3-32ab+48c\ ,$$

y sera nécessairement négatif ; ce qui démontre le théorème pour le quatrième degré.

La même démonstration s'étend à tous les degrés pairs ; mais, si le degré est impair, par exemple, du cinquième, en opérant comme ci-dessus, on arrivera à l'équation (2) du n.° 45, que j'écris ainsi

$$125y=(16a^3-55ab+75c)x^2+(12a^2b-10ac-30b^2+10d)x$$
$$+(8a^2c-5ad-20bc+125e)+\frac{d}{x}(4a^2-10b)\ .$$

Ici il faut distinguer deux cas : si $16a^3-55ab+75c$ est négatif, on pourra toujours prendre x positif assez grand pour que le deuxième membre, et par conséquent y, soit négatif ; ce qui démontre le théorème pour ce cas : si, au contraire, $16a^3-55ab+75c$ est positif, il faut, suivant le théorème, que x négatif rende encore le deuxième membre négatif, ce qu'il n'est pas aisé d'apercevoir ; mais si, dans l'équation $X=0$, on change $+x$ en $-x$, a et c changeront de signe, ainsi que

$$16a^3-55ab+75c\ ,$$

qui deviendra négative sans changer de grandeur absolue : ce second cas rentrera dans le précédent ; c'est-à-dire qu'on pourra prendre x positif assez grand pour que y soit négatif : donc, puisque les racines n'ont fait que changer de signe, on pouvait auparavant prendre x négatif assez grand pour que y fut négatif ; ce qui démontre encore le théorème pour ce cas (*).

On sent qu'on peut appliquer à tous les degrés impairs ce qu'on a dit du cinquième. Je ne m'arrête pas à démontrer l'expression générale de la quantité (F) du théorème, parce qu'il n'y a aucune difficulté à la déduire de l'équation

$$x^m+ax^{m-1}+\ldots\ldots\ldots=y\ ,$$

et de sa dérivée

$$mx^{m-1}+(m-1)ax^{m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0\ ;$$

en opérant comme nous avons fait pour les quatrième et cinquième degrés.

Cette valeur de (F) est, pour les degrés 4, 5, 6, 7, 8,

$F_4=9a^3-32ab+48c$; $F_5=16a^3-55ab+75c$; $F_6=25a^3-84ab+108c$;

$F_7=36a^3-119ab+147c$; $F_8=49a^3-160ab+192c$.

(*) On peut objecter, à cette démonstration, que le signe de x^2 ne change pas, soit qu'on prenne x en $+$ ou en $-$; mais, si on multiplie la proposée par x, elle deviendra de degré pair, et l'on pourra lui appliquer la formule du sixième degré : l'expérience prouve, en effet, que les deux formules réussissent également.

52. Nous avons déjà vu (n.° 50) comment la combinaison de notre théorème avec celui de *Descartes* faisait distinguer le signe des racines réelles, quand on connait le nombre des imaginaires : il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode à une équation d'un degré plus élevé : je prends, pour deuxième exemple,

$$x^7+4x^6+5x^5-4x^4-13x^3-4x^2+7x+4=0=(x-1)^2(x+1)^3(x^2+3x+4),$$

dans laquelle on a reconnu (chap. VI) deux imaginaires : comme elle a deux variations et cinq permanences, j'en conclus qu'elle a nécessairement trois racines réelles négatives, et, de plus, deux racines réelles douteuses, parce que le facteur imaginaire du deuxième degré a pu introduire ou deux variations ou deux permanences; mais ce doute est levé par le signe négatif de F_7 qui vaut ici -664, et qui indique deux racines de signe contraire, c'est-à-dire, positives : donc, la proposée a deux racines imaginaires, trois réelles négatives, et deux réelles positives.

D'après ce qui précède, il est aisé de comprendre la formation et l'usage du tableau suivant, dans lequel, pour abréger, les lettres i, v, p, n, d remplacent les mots, racines imaginaires, variations, racines réelles positives, racines réelles négatives, racines réelles douteuses.

2.me *Degré*. Si la proposée n'a pas d'imaginaires, elle aura autant de p que de v.

3.me *Degré*. S'il n'y a point d'imaginaires, il y aura autant de p que de v. S'il y a deux imaginaires, la racine réelle sera de signe contraire à celui du terme constant.

Dans les tables qui suivent, le signe des deux racines douteuses marquées par la lettre d est toujours contraire à celui de F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, respectivement pour les degrés 4, 5, 6, 7, 8.

On n'a pas compris, dans ces tables, le cas où toutes les racines sont réelles, parce qu'alors on a autant de positives que de variations et de négatives que de permanences, ni celui où l'on a $i=m-1$, parce que, dans ce cas, la racine réelle unique est de signe contraire à celui du terme constant.

4.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	2	
2	1	1	1	
2	2			2
2	3	1	1	
2	4	2	0	

5.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	3	
2	1	1	2	
2	2		1	2
2	3	1		2
2	4	2	1	
2	5	3	0	

6.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	4	
2	1	1	3	
2	2		2	2
2	3	1	1	2
2	4	2		2
2	5	3	1	
2	6	4	0	
4	0	0	2	
4	1	1	1	
4	2			2
4	3	1	1	
4	4			2
4	5	1	1	
4	6	0	0	

7.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	5	
2	1	1	4	
2	2		3	2
2	3	1	2	2
2	4	2	1	2
2	5	3		2
2	6	4	1	
2	7	5	0	
4	0	0	3	
4	1	1	2	
4	2		1	2
4	3	1		2
4	4		1	2
4	5	1		2
4	6	2	1	
4	7	3	0	

8.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	6	
2	1	1	5	
2	2		4	2
2	3	1	3	2
2	4	2	2	2
2	5	3	1	2
2	6	4		2
2	7	5	1	
2	8	6	0	
4	0	0	4	
4	1	1	3	
4	2		2	2
4	3	1	1	2
4	4			4
4	5	1	1	2
4	6	2		2
4	7	3	1	
4	8	4	0	
6	0	0	2	
6	1	1	1	
6	2			2
6	3	1	1	
6	4			2
6	5	1	1	
6	6			2
6	7	1	1	
6	8	2	0	

On remarquera qu'un cas échappe à la méthode exposée ; c'est celui où la proposée étant du huitième degré, et ayant quatre racines imaginaires, a quatre variations et quatre permanences : alors les quatre imaginaires peuvent être prises de trois façons, savoir ; toutes quatre sur les variations, toutes quatre sur les permanences, ou deux sur les variations et deux sur les permanences. La formule F_2 ne peut lever que le doute qui résulte de deux combinaisons et non de trois. Il faut recourir ici à d'autres moyens qu'on verra plus bas.

On pourrait continuer ces tables pour des degrés plus élevés, et la règle s'appliquerait de même à tous les cas où le doute n'a lieu qu'entre deux combinaisons ; mais le nombre des cas douteux à triple, à quadruple, etc., combinaisons, va toujours en croissant : c'est pourquoi nous exposerons, plus bas, une autre méthode générale applicable à tous les cas sans exception, mais bien moins simple.

53. Tout ce que nous avons dit sur la première méthode ci-dessus, suppose que la proposée est complète ou a tous ses termes : s'il en manquait un ou plusieurs, on ne pourrait plus employer le nombre de ses variations. Dans ce cas, il suffirait de la multiplier par un facteur connu du premier degré, du deuxième degré...., et, en général, du degré suffisant, pour que le produit fût une équation complète : alors, après avoir assigné le nombre de chaque espèce de racines, on en retrancherait celles du facteur qui a été introduit : ainsi, ce cas rentre dans la méthode.

54. *Deuxième méthode plus générale.* Le but qu'on se propose dans le problème qui nous occupe, c'est de connaître les signes des racines x_1, x_2 .... de $X'=0$, correspondantes aux ordonnées y_1, y_2........ des sommets de la courbe parabolique : pour cela, il suffit de former une équation auxiliaire dont les racines soient les produits xy, ou les quotiens $\frac{y}{x}$: il est évident que les signes des racines de cette auxiliaire auront une correspondance intime et nécessaire avec ceux des x et des y, et que connaissant la position ou

le signe de y, ainsi que le signe de l'inconnue auxiliaire par le moyen des signes de l'équation auxiliaire, on connaîtra aussi le signe cherché de x.

Je pose donc $xy=z$ ou $xX=z$, et j'élimine x entre $xX=z$ et $X'=0$ première dérivée de $X=0$; il vient une équation en z que je représente par $Z=0$, et qu'on peut appeler équation des signes des racines réelles : elle caractérise les racines positives et négatives, comme l'équation $Y=0$ du chapitre VI caractérise les racines imaginaires : elles sont toutes deux du degré $m-1$, et leur ensemble complète la solution du problème général de la distinction des diverses espèces de racines.

La formation de l'auxiliaire $Z=0$ n'est pas plus difficile que celle de $Y=0$: le même mode d'élimination convient à toutes deux ; c'est pourquoi nous ne donnerons d'exemples que pour le quatrième degré. La première méthode que nous avons exposée dans ce chapitre est si simple, qu'il suffit presque de la seule inspection de la proposée pour assigner le nombre de ses racines réelles positives et négatives dans les huit premiers degrés : on ne devra donc recourir à l'équation $Z=0$, que dans les degrés supérieurs au huitième, et seulement dans les cas où le doute reposant sur plus de deux combinaisons, la première méthode est insuffisante.

Si $X=0$ n'avait pas tous ses termes, on se conduirait comme au n.° 53.

55. ***Application au quatrième degré.*** Soit

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ;$$

on a

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0\ .$$

Eliminant x entre $xX=z$ et $X'=0$, on trouve, pour $Z=0$, la suivante :

$$4^3z^3+(-81a^5+504a^3b-624a^2c+768ad+1152bc-704ab^2)z^2$$
$$+2(-18a^4c^2-27a^4bd+21a^3b^2c+18a^3cd+79a^2bc^2-4a^2b^4$$
$$+144a^2b^2d-92ab^3c-272abcd-126ac^3+120b^2c^2+288c^2d$$
$$+16b^5$$

$$+16b^5+256bd^2-128b^3d)z-27a^4cd^2+a^3c^2(9bd-2c^2)$$
$$+a^2c(b^2c^2-6c^2d-4b^3d+144bd^2)+2ac^2(9bc^2-40b^2d$$
$$-96d^2)+c(144bc^2d-4b^3c^2+16b^4d+256d^3-128b^2d$$
$$-27c^4)=0 \,. \qquad (Z)$$

Voyons maintenant comment il faut faire usage de cette équation $Z=0$. Dans le cas douteux du quatrième degré, $X=0$ a deux variations, et $X'=0$ en a une ou deux : l'origine des x peut avoir les quatre positions A, A', A'', A''' (fig. 4 et 4*) ; dans la (fig. 4), les deux racines de $X=0$ sont positives ; elles sont négatives dans la (fig. 4*) : les signes des coordonnées x, y des sommets S_1, S_2, S_3 sont donnés par leur position, et portent les mêmes indices : ceux des z sont donnés par la relation $z=xy$; c'est-à-dire, que z est positif quand x et y sont de même signe, et négatif quand x et y sont de signes différens. Les variations de $Z=0$ résultent des signes de z_1, z_2, z_3 : cela posé on a

En A, $+x_2+y_2$, $+x_3+y_3$, $-x_1+y_1$; $+z_2$, $-z_3$, $-z_1$; Z a 1 variation.

En A', $+x_1-y_3$, $-x_2+y_2$, $-x_1+y_1$; $-z_3$, $-z_2$, $-z_1$; Z a 0 variations.

En A'', $+x_2+y_2$, $+x_1+y_3$, $-x_1-y_1$; $+z_2$, $+z_3$, $+z_1$; Z a 3 variations.

En A''', $+x_3+y_3$, $-x_2+y_2$, $-x_1-y_1$; $+z_3$, $-z_2$, $+z_1$; Z a 2 variations.

Or, les positions A, A' de l'origine sont relatives à deux racines positives dans $X=0$, et les positions A'', A''' se rapportent à deux négatives : de là résulte cette règle pour les racines douteuses du quatrième degré.

Les deux racines de $X=0$ sont positives si $Z=0$ n'a point ou n'a qu'une variation, et négatives si Z a deux ou trois variations.

En raisonnant pour les autres degrés comme nous avons fait pour le quatrième, et, s'aidant des courbes paraboliques, il serait facile de construire une table qui indiquerait le signe des racines douteuses de la proposée, correspondant aux variations de l'auxiliaire $Z=0$ pour chaque degré. Ainsi, pour le cas de quatre racines douteuses, qui a lieu dans le huitième degré, lorsque X a quatre variations, on trouve que ces racines sont toutes quatre positives, si Z a une ou deux variations; toutes quatre négatives, si Z a cinq ou six variations; deux positives et deux négatives, si Z a trois ou quatre variations.

56. *Observations sur les méthodes de MM. Lagrange et Cauchy.* Le problème de la distinction des diverses espèces de racines, a exercé la sagacité de tous les géomètres. *M. de Gua* est le premier qui ait jeté du jour sur cette matière. Le célèbre *Lagrange* a donné ensuite les caractères de la réalité des racines, en faisant voir que l'équation aux quarrés des différences des racines, n'a que des variations de signe, quand la proposée a toutes ses racines réelles.

Cependant, on est obligé de convenir que cette méthode devient impraticable, quand la proposée est d'un degré un peu élevé, parce que l'auxiliaire aux quarrés des différences étant du degré $m.\frac{m-1}{2}$, devient impossible à former. L'illustre auteur qui ne s'est pas dissimulé cet inconvénient, a proposé une autre méthode dans sa *Résolution des équations numériques*, note VIII, pag. 177 : celle-ci est préférable en ce qu'elle n'emploie que des équations d'un degré inférieur à celui de la proposée : néanmoins, elle devient bientôt impraticable, parce qu'elle exige un nombre $m-1$ d'auxiliaires : elle a d'ailleurs un grand défaut qui lui est commun avec la première, celui de faire monter le nombre des conditions de réalité à $\frac{m(m-1)}{2}$; tandis que nous avons vu que le nombre indispensable n'est que $(m-1)$.

Enfin, M. *Cauchy* (*Journal de l'école polytechnique*, 17.me

cahier) a repris la deuxième méthode de *Lagrange*, en ajoutant à la recherche des imaginaires, celle du signe des racines réelles.

Ce géomètre emploie, comme moi, deux auxiliaires $Z=0$, $Y=0$, la première pour déterminer la différence entre le nombre des racines réelles positives, et celui des négatives de la proposée, la deuxième pour déterminer le nombre des racines réelles ; mais, la première résulte de l'élimination de x entre $X'=0$ et $z+xXX''=0$, et la deuxième de l'élimination de $X'=0$ et $y+XX''=0$; on voit que ces deux équations $z+xXX''=0$ et $y+XX''=0$ diffèrent des miennes $z=xX$, $y=X$ par le facteur X'' qu'elles contiennent de plus que les miennes : aussi, les auxiliaires $Z=0$, $Y=0$ de M. *Cauchy* n'ont point la même signification que les miennes : nos deux méthodes ne se ressemblent qu'en apparence, mais diffèrent entièrement : ce sont deux routes qui, partant de deux points voisins, doivent arriver au même but par des circuits différens. M. *Cauchy* est obligé d'employer un nombre $m-1$ d'auxiliaires formées comme la première ; tandis qu'il ne m'en faut qu'une : ses auxiliaires exigent une élimination plus longue que la mienne, à cause du facteur X'' qu'il emploie. Il cherche d'abord à distinguer le signe des racines réelles, puis il passe aux imaginaires : j'ai commencé, au contraire, par le deuxième problème qui résout presque entièrement le premier, tandis que l'inverse n'a pas lieu.

Il y a encore une autre différence très-importante entre les deux méthodes : celle de M. *Cauchy* suppose qu'aucune des $m-1$ auxiliaires successives n'ait de racines égales entre elles ou à zéro. Pour lever cet obstacle qui n'existe pas dans ma méthode, il emploie divers expédiens qui prouvent la sagacité de l'auteur ; mais qui diminue bien peu le vice de sa méthode : c'est dans l'ouvrage même qu'il faut l'apprécier : il n'a fallu rien moins que nonante-une pages in-4.° pour la développer. On doit sans doute des éloges à l'auteur ; mais, elle est si laborieuse et si difficile, qu'on sera rarement tenté de la mettre en pratique.

Je ne sais si je me fais illusion, mais je pense que ma méthode

est assez simple et facile pour devenir usuelle et entrer dans les livres élémentaires : mon équation fondamentale $Y=0$ est si simple, et se présentait si naturellement, que je ne conçois pas comment MM. *Lagrange et Cauchy* ont pu passer à côté sans l'apercevoir. Un problème difficile est une espèce de labyrinthe : plusieurs routes se présentent pour en sortir : les unes sont fausses, les autres inextricables : la véritable est cachée ; ce n'est pas toujours le plus habile qui la découvre ; c'est souvent le plus heureux.

CHAPITRE VIII.

MÉTHODE NOUVELLE POUR QUARRER LES COURBES.

Observations préliminaires.

57. Le problème de la quadrature des courbes, ou autrement de l'intégration des différentielles d'une seule variable, est d'une grande importance, puisque la plupart des questions aboutissent à une intégration.

Les géomètres ont proposé diverses méthodes d'intégrer, par approximation, les formules qui ne peuvent l'être ni algébriquement, ni par les arcs de cercle et les logarithmes : le moyen offert par les séries est souvent illusoire et trompeur, parce qu'elles ne sont pas toujours convergentes.

Un autre moyen connu consistait à substituer à la courbe à quarrer, une autre courbe du genre parabolique qu'on sait quarrer, et qu'on faisait coïncider à l'aide de coefficiens indéterminés : ainsi, pour intégrer $\int y\,dx$, on posait

$$y=a+bx+cx^2\ldots\ldots\ldots;$$

et l'on avait

$$\int y\,dx=\int dx(a+bx+cx^2\ldots\ldots)=ax+\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3+\ldots\ldots;$$

on déterminait a, b, c, par la condition que la parabole passât par 3 ou n points donnés de la courbe proposée dont les ordonnées étaient équidistantes : enfin, on déterminait la constante ajoutée à

l'intégrale, de manière à la faire correspondre aux deux limites assignées.

Ce procédé devenait long et impraticable quand les coefficiens a, b, c étaient en nombre un peu grand (Voy. note 1) : M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. 6, pag. 372), remarquant que ces coefficiens numériques a, b, c........, demeurent invariables quand leur nombre est le même, les a calculés pour tous les cas depuis deux ordonnées jusqu'à treize, et il en déduit douze formules précieuses : leur usage est très-simple : la substitution des ordonnées connues donne tout de suite l'aire cherchée $\int X dx$, plus brièvement et plus exactement que par les méthodes connues des séries.

M. *Kramp* s'est arrêté à la formule relative à treize ordonnées : « J'aurais désiré, dit-il, de pouvoir continuer cette table jusqu'au » diviseur 24 ; mais l'immensité du travail m'a effrayé. Il doit » sans doute y avoir quelque méthode beaucoup plus abrégée que » celle que nous avons suivie ; mais jusqu'ici, au moins, je l'ai » cherchée vainement ».

J'ai cherché cette méthode, et j'ai eu le bonheur de la trouver : elle n'a rien de commun avec celle de M. *Kramp* ; elle est simple, et elle m'a fait trouver la formule relative à vingt-cinq ordonnées : j'ai rectifié en même temps quelques erreurs échappées à M. *Kramp*.

Exposé de ma méthode.

58. Le problème qui nous occupe peut être énoncé ainsi :

Connaissant les deux ordonnées extrêmes d'un arc de courbe, et plusieurs ordonnées intermédiaires équidistantes, exprimer en fonction de ces ordonnées, l'aire mixtiligne comprise entre les deux ordonnées extrêmes, la courbe et l'axe des x.

La solution de ce problème fournira aussi celle de l'intégration des fonctions d'une seule variable, puisque, intégrer $X dx$, c'est quarrer la courbe qui a pour équation $y = X$.

Soient y_0, y_1, y_2 .... y_n les ordonnées connues de la courbe $y=X$ qu'il s'agit de quarrer entre les limites y_0 et y_n. Soit S l'aire cherchée $=\int X dx$, et supposons le nombre des ordonnées connues $=7$. Ce que nous dirons de ce nombre 7 s'appliquera à tout autre.

1.° Je remarque que, quelle que soit la valeur de chacun des coefficiens de la formule que nous cherchons, ses ordonnées également éloignées des extrêmes, doivent y jouer le même rôle, parce que la première peut être prise pour la dernière, et *vice versâ* : ainsi, par exemple, y_2 et y_4 doivent avoir le même coefficient : cette observation réduit de moitié le nombre des coefficiens à trouver, et fait voir que la formule doit être de cette forme,

$$S=A(y_0+y_6)+B(y_1+y_5)+C(y_2+y_4)+Dy_3 \quad . \quad . \quad (F)$$

2.° Les coefficiens indéterminés A, B, C, D doivent être tels que, quand la courbe proposée $y=X$ est quarrable, la formule (F) donne, pour l'aire S, une valeur numérique connue et exacte : ainsi, il est nécessaire et suffisant que ces coefficiens satisfassent à quatre observations qu'on pourra choisir parmi les plus simples, pourvu qu'elles soient distinctes et qu'elles ne se comportent pas l'une l'autre. (Note 5.)

3.° Supposons, pour première observation, que la courbe à quarrer est une ligne droite, parallèle à l'axe des x, dont elle est éloignée de la quantité 1, et que l'intervalle des ordonnées extrêmes est 6. L'espace à quarrer sera un rectangle $ABCD$ (fig. 15) : on aura

$$y_0=y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=y_6=1,$$

aire $ABCD=S=6$, et la formule (F) deviendra

$$6=2A+2B+2C+D \quad . \qquad (1)$$

4.° Je supposerai, pour deuxième observation, que la courbe à

quarrer est une parabole du deuxième degré, qui touche, par son sommet, l'axe AB des x en son milieu O, et qui passe par les angles CD du rectangle ci-dessus $ABCD$.

L'équation de cette parabole, en prenant l'origine au point O, sera $y=\frac{x^2}{9}$: en y faisant

$$x=0\,,\quad x=1\,,\quad x=2\,,\quad x=3\,,\quad x=-1\,,\quad x=-2\,,\quad x=-3\,,$$

on aura

$$y_0=1\,,\quad y_6=1\,,\quad y_1=y_5=\tfrac{4}{9}\;;\quad y_2=y_4=\tfrac{1}{9}\,,\quad y_3=0\;;\quad S=AC.\frac{AB}{3}=2\;;$$

$\left(\text{parce que } S=CAOBD=2\int y\,dx=2\int\frac{x^2dx}{9}=\frac{2x^3}{27}=2\right)$: la formule (F) devient, par la substitution de ces valeurs,

$$2=2A+\tfrac{8}{9}B+\tfrac{2}{9}C\,,$$

ou

$$9A+4B+C=9\,. \qquad (2)$$

5.° Je prends, pour troisième courbe d'expérience, la parabole $y=\frac{x^4}{9^2}$ passant par les points O, C, D, comme la précédente : ses sept ordonnées sont

$$y_0=y_6=1\,,\quad y_1=y_5=\frac{16}{9^2}\,y_2=y_4=\frac{1}{9^2}\,,\quad y_3=0\;;$$

son aire est

$$S=\tfrac{1}{5}.AB.AC=\tfrac{6}{5}\;;$$

substituant ces valeurs dans (F), on a

$$9^2.A+16B+C=\frac{36}{5}\,.$$

6.° Enfin, je prends, pour quatrième courbe d'observation, la parabole

parabole $y=\frac{x^6}{9^3}$, placée dans le rectangle $ABCD$, comme les précédentes : ses ordonnées sont

$$y_0=y_6=1\ ,\quad y_1=y_5=\frac{64}{9^3}\ ,\quad y_2=y_4=\frac{1}{9^3}\ ,\quad y_3=0\ ;$$

son aire est

$$S=\tfrac{1}{7}.AB.AC=\tfrac{6}{7}\ ;$$

la substitution de ces valeurs dans (F), la change en celle-ci

$$9^3.A+64.B+C=\frac{3^7}{7}\ . \qquad (4)$$

7.° Eliminant A, B, C entre les trois équations (2), (3), (4), on trouve très-simplement

$$A=\tfrac{41}{140}\ ,\quad B=\tfrac{216}{140}\ ,\quad C=\tfrac{27}{140}\ ;$$

ces valeurs mises dans (1), on en tire $D=\frac{272}{140}$: il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs de A, B, C, D dans (F), après les avoir divisées par 6, afin de faire l'intervalle des ordonnées extrêmes égal à l'unité, et il vient finalement pour la formule cherchée

$$840.S=41(y_0+y_6)+216(y_1+y_5)+27(y_2+y_4)+272y_3\ . \qquad (F_6)$$

59. On procèdera de la même manière pour trouver les formules correspondantes à un nombre quelconque pair ou impair d'ordonnées. (Voy. note 3.)

Tout autre système de courbe d'expérience fournirait des formules, quelquefois différentes, qui exigeraient une élimination plus difficile, et qui, en général, seraient moins exactes. (Voy. note 5.)

Il serait, sans doute, superflu de rapporter ici tous les calculs qui ont servi à former le tableau ci-après, dans lequel j'ai rassemblé toutes les formules qui peuvent être necessaires dans la pratique : cependant, comme celle relative à vingt-cinq ordonnées, ou au

diviseur 24, est la plus importante, et en même temps la plus longue à trouver, je crois devoir rapporter les bases du calcul, afin qu'on puisse, au besoin, vérifier la formule dont je garantis au reste l'exactitude, après l'avoir éprouvée sur plusieurs exemples.

On voit d'abord que la formule doit être de cette forme

$$S=A(y_0+y_{24})+B(y_1+y_{23})+C(y_2+y_{22})\ldots\ldots+Ny_{12}. \quad (F_{24})$$

Il faut treize expériences pour déterminer les treize coefficiens A, B, C,.......N; la première est toujours la droite CD ou parabole $y=x^0$.

Il faut imaginer ensuite les douze paraboles

$$y=\frac{x^2}{12^2}, \quad y=\frac{x^4}{12^4}, \quad y=\frac{x^6}{12^6}\ldots\ldots\ldots y=\frac{x^{24}}{12^{24}},$$

touchant toutes le milieu O de la base AB, et passant par les points C et D.

On calculera, dans chaque parabole, les vingt-quatre ordonnées égales deux à deux. Les douze aires ou valeurs de S seront, en faisant l'intervalle $AB=24$,

$$\frac{24}{3}, \frac{24}{5}, \frac{24}{7}, \frac{24}{9}, \frac{24}{11}, \frac{24}{13}, \frac{24}{15}, \frac{24}{17}, \frac{24}{19}, \frac{24}{21}, \frac{24}{23}, \frac{24}{25},$$

ce qui se démontre facilement par le calcul intégral.

Ayant substitué, dans (F_{24}), les valeurs y_0, y_1......y_{24}, S, on aura les treize équations suivantes, dont la symétrie est remarquable,

$$2.A+2B+2C+2D+2E+2F+2G+2H+2I+2K+2L+2M+N=24 \quad (1)$$

$$12^2.A+11^2.B+10^2.C+9^2.D+8^2.E+7^2.F+6^2.G+5^2.H+4^2.I+3^2.K+2^2.L+M=\frac{12^3}{3} \quad (2)$$

$$12^4.A+11^4.B+10^4.C+9^4.D+8^4.E+7^4.F+6^4.G+5^4.H+4^4.I+3^4.K+2^4.L+M=\frac{12^5}{5} \quad (3)$$

. . . .

. . . .

$$12^{24}.A+11^{24}.B+10^{24}.C+9^{24}.D+8^{24}.E+7^{24}.F+6^{24}.G+5^{24}.H+4^{24}.I+3^{24}.K$$
$$+2^{24}.L+M=\frac{12^{25}}{25} \quad (13)$$

On éliminera M en retranchant (2) de (3), (3) de (4), (4) de (5).......; il viendra onze équations desquelles on éliminera L, en combinant toujours les deux équations voisines (Voy. note 2) : on continuera ainsi à éliminer K, I, H, G.......etc. On arrivera à la valeur de A et, en remontant, on aura B, C, D, E, etc., et enfin N par l'équation (1). Il faudra ensuite diviser chaque coefficient par 24, afin que l'intervalle des ordonnées extrêmes que nous avons fait $=24$ devienne $=1$.

60. Dans le tableau suivant, l'indice qui accompagne la lettre (F) indique le diviseur qui sert de base à la formule : ainsi, (F_6) signifie que l'intervalle des ordonnées extrêmes y_0, y_6 a été partagé en six parties égales, ou qu'il y a sept ordonnées. La lettre S représente toujours $\int X dx$, c'est-à-dire, l'aire cherchée.

Recueil de formules.

(F_1) $2S=y_0+y_1$.

(F_2) $6S=y_0+y_2+4y_1$.

(F_3) $8S=y_0+y_3+3(y_1+y_2)$;

(F_4) $90S=7(y_0+y_4)+32(y_1+y_3)+12y_2$.

(F_5) $288S=19(y_0+y_5)+75(y_1+y_4)+50(y_2+y_3)$;

(F_6) $840S=41(y_0+y_6)+216(y_1+y_5)+27(y_2+y_4)+272y_3$;

(F_8) $28350S=989(y_0+y_8)+5888(y_1+y_7)-928(y_2+y_6)+10496(y_3+y_5)-4540y_4$.

(F_{10}) $598752S=16067(y_0+y_{10})+106300(y_1+y_9)-48525(y_2+y_8)$

$+272400(y_3+y_7)-260550(y_4+y_6)+427368y_5$.

(F_{12}) $63063000S=1364651(y_0+y_{12})+9903168(y_1+y_{11})-7587864(y_2+y_{10})$

$+35725120(y_3+y_9)-51491295(y_4+y_8)+87516288(y_5+y_7)-87797136y_6$.

$$(F_{24})\ 3693087735962625000S = 35200969735190093(y_0+y_{24})$$

$$+379270388261611008(y_1+y_{23}) - 1043444955653209152(y_2+y_{22})$$

$$+5985259999368555008(y_3+y_{21}) - 23348698048773157032(y_4+y_{20})$$

$$+78144929815004656128(y_5+y_{19}) - 215016221369057252032(y_6+y_{18})$$

$$+499068087287186884608(y_7+y_{17}) - 981114320530281465657(y_8+y_{16})$$

$$+1649142126612730224128(y_9+y_{15}) - 2380252128883705796019 2(y_{10}+y_{14})$$

$$+2962867290268854786048(y_{11}+y_{13}) - 3186001615464675100912y_{12}\ .$$

Les cinq premières formules sont presque sans utilité dans la pratique, parce qu'elles donnent une approximation trop bornée : la sixième servira dans les cas les plus ordinaires, ainsi que la huitième : la dixième et la douzième devront être employées dans les cas où l'on veut avoir à peu près dix chiffres exacts ; la vingt-quatrième sera employée dans les cas très-rares où l'on veut pousser l'exactitude jusqu'à seize ou dix-huit chiffres.

Dans des cas extraordinaires, où l'on aurait besoin d'une approximation encore plns grande, on pourrait calculer une formule pour quarante-neuf ordonnées : il ne faudrait, ponr cela, que du temps et de la patience : on peut aussi remplir, quoiqne moins parfaitement, le même but, en partageant l'intervalle des ordonnées extrêmes en un certain nombre de parties égales dont chacune est ensuite subdivisée en vingt-quatre, et l'on applique à chaque groupe de vingt-quatre divisions, la formule (F_{24}) ; en voici un exemple.

Je suppose l'intervalle total partagé en cent vingt parties par cent vingt-une ordonnées. Je représente, pour abréger, par p, a, b, c, d,......n les nombres de la formule (F_{24}), et l'on obtient tout de suite la suivante :

$$(F_{120}) \qquad 5.p.S = a(y_0 + 2y_{24} + 2y_{48} + 2y_{72} + 2y_{96} + y_{120})$$

$$+ b(y_1 + y_{23} + y_{25} + y_{47} + y_{49} + y_{71} + y_{73} + y_{95} + y_{97} + y_{119})$$

$$- c(y_2 + y_{22} + y_{26} + y_{46} + y_{50} + y_{70} + y_{74} + y_{94} + y_{98} + y_{118})$$

$$+ d(y_3 + y_{21} + y_{27} + y_{45} + y_{51} + y_{69} + y_{75} + y_{93} + y_{99} + y_{117})$$

$$- e(y_4 + y_{20} + y_{28} + y_{44} + y_{52} + y_{68} + y_{76} + y_{92} + y_{100} + y_{116})$$

$$+ f(y_5 + y_{19} + y_{29} + y_{43} + y_{53} + y_{67} + y_{77} + y_{91} + y_{101} + y_{115})$$

$$- g(y_6 + y_{18} + y_{30} + y_{42} + y_{54} + y_{66} + y_{78} + y_{90} + y_{102} + y_{114})$$

$$+ h(y_7 + y_{17} + y_{31} + y_{41} + y_{55} + y_{65} + y_{79} + y_{89} + y_{103} + y_{113})$$

$$- i(y_8 + y_{16} + y_{32} + y_{40} + y_{56} + y_{64} + y_{80} + y_{88} + y_{104} + y_{112})$$

$$+ k(y_9 + y_{15} + y_{33} + y_{39} + y_{57} + y_{63} + y_{81} + y_{87} + y_{105} + y_{111})$$

$$- l(y_{10} + y_{14} + y_{34} + y_{38} + y_{58} + y_{62} + y_{82} + y_{86} + y_{106} + y_{110})$$

$$+ m(y_{11} + y_{13} + y_{35} + y_{37} + y_{59} + y_{61} + y_{83} + y_{85} + y_{107} + y_{109})$$

$$- n(y_{12} + y_{36} + y_{60} + y_{84} + y_{108}).$$

Dans l'emploi de toutes ces formules, il faut remarquer que si l'intervalle des ordonnées extrêmes, qu'on a pris pour unité, était en général c, il faudrait multiplier par c la valeur de S, donnée par la formule.

61. Il est une autre remarque importante : si la courbe à quarrer renferme un point d'inflexion, ou quelqu'autre point singulier, entre les limites de l'intégrale cherchée, il faut évaluer séparément les deux portions d'aires qui sont de part et d'autre du point singulier, sans quoi l'exactitude du résultat serait sensiblement altérée. (Voy. note 4.) On verra ci-après comment

M. *Kramp*, pour n'avoir pas fait cette attention, a été conduit à de fausses conséquences, et a cru apercevoir un paradoxe qui n'existe pas.

Application des formules.

62. Il me reste une dernière tâche à remplir : il faut soumettre nos formules à l'expérience qui est la vraie pierre de touche de toutes les théories.

Je prends, pour première application, la recherche du logarithme hyperbolique de deux : il s'agit, pour cela, d'intégrer $\frac{dx}{x}$, ou de quarrer l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$.

Pour appliquer la formule (F_{24}), il faut faire dans $y=\frac{1}{x}$; successivement

$$x=1,\ x=1+\tfrac{1}{24},\ x=1+\tfrac{2}{24},\ x=1+\tfrac{3}{24}\ldots\ldots x=1+\tfrac{24}{24},$$

et l'équation donne

$$y_0=1,\ y_1=\tfrac{24}{25},\ y_2=\tfrac{12}{13},\ y_3=\tfrac{8}{9},\ y_4=\tfrac{6}{7},\ y_5=\tfrac{24}{29},\ y_6=0{,}8\ ;$$

$$y_7=\tfrac{24}{31},\ y_8=0{,}75,\ y_9=\tfrac{8}{11},\ y_{10}=\tfrac{12}{17},\ y_{11}=\tfrac{24}{35},\ y_{12}=\tfrac{2}{3},$$

$$y_{13}=\tfrac{24}{37},\ y_{14}=\tfrac{12}{19},\ y_{15}=\tfrac{8}{13},\ y_{16}=0{,}6,\ y_{17}=\tfrac{24}{41},\ y_{18}=\tfrac{4}{7},$$

$$y_{19}=\tfrac{24}{43},\ y_{20}=\tfrac{6}{11},\ y_{21}=\tfrac{8}{15},\ y_{22}=\tfrac{12}{23},\ y_{23}=\tfrac{24}{47},\ y_{24}=\tfrac{1}{2}.$$

Il ne s'agit que de substituer ces valeurs de $y_0 \ldots\ldots y_{24}$ dans la formule (F_{24}) ; on opère d'une manière analogue pour les autres formules. Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour S ou Log. 2, par nos formules (F_6), (F_8), (F_{10}), (F_{12}), (F_{24}), et par la douzième de M. *Kramp*,

	Log.2 d'après *Bérard.*	Log.2 d'après *Kramp.*
(F_6)	0,6931480622	
(F_8)	0,6931472145	
(F_{10})	0,6931471820	
(F_{12})	0,6931471806261	0,6931471807262
(F_{24})	0,693147180559945310 .	

La vraie valeur est Log.2=0,693147180559945309 .

Il suit de ce tableau que le résultat de ma formule (F_{12}) est trop fort de 0,0000000000662 et celui de M. *Kramp* de 0,0000000001663 : l'erreur de M. *Kramp* est donc presque triple de la mienne : aussi, sa douzième formule est-elle différente de la mienne. (Voy. note 6.)

Le même tableau fait encore voir que le résultat de ma formule (F_{24}) n'est en défaut que d'une unité sur le dix-huitième chiffre, approximation qu'aucune autre méthode ne saurait donner aussi simplement, et qui excède de beaucoup les besoins ordinaires.

J'ai pris, pour deuxième application, la détermination de la longueur de l'arc de 45° ou de $\frac{\pi}{4}$: x étant la tangente de l'arc, il s'agit d'intégrer $\frac{dx}{1+x^2}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, c'est-à-dire, de quarrer, entre les mêmes limites, la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$, en faisant successivement

$$x=0\ ;\quad x=\tfrac{1}{24}\ ,\quad x=\tfrac{2}{24}\ ,\ \ldots\ldots\ x=\tfrac{24}{24}\ ,$$

on trouve

$y_0 = 1$, $y_1 = \frac{576}{577}$, $y_2 = \frac{144}{145}$, $y_3 = \frac{64}{65}$, $y_4 = \frac{36}{37}$,

$y_5 = \frac{576}{601}$, $y_6 = \frac{16}{17}$, $y_7 = \frac{576}{625}$, $y_8 = \frac{9}{10}$, $y_9 = \frac{64}{73}$,

$y_{10} = \frac{144}{169}$, $y_{11} = \frac{576}{697}$, $y_{12} = \frac{4}{5}$, $y_{13} = \frac{576}{745}$, $y_{14} = \frac{144}{193}$,

$y_{15} = \frac{64}{89}$, $y_{16} = \frac{9}{13}$, $y_{17} = \frac{576}{865}$, $y_{18} = \frac{16}{25}$, $y_{19} = \frac{576}{937}$,

$y_{20} = \frac{36}{61}$, $y_{21} = \frac{64}{113}$, $y_{22} = \frac{144}{265}$, $y_{23} = \frac{576}{1105}$, $y_{24} = \frac{1}{2}$.

Ces valeurs mises dans ma formule (F_{24}), on trouve

$$\pi = 3,1415926535897\,90,$$

valeur qui n'est en défaut qu'au seizième chiffre, tandis que M. *Kramp* n'a pu en trouver que douze d'exacts, par une combinaison laborieuse de plusieurs de ses formules.

Dans ce deuxième exemple, nous n'avons trouvé que quinze chiffres exacts, tandis que dans le premier nous en avions eu dix-sept et presque dix huit. La raison de cette différence tient à ce que ici la courbe à quarrer $y = \frac{1}{1+x^2}$ a une inflexion au point dont les coordonnées sont $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{4}$: cette circonstance donne lieu à une anomalie qui altère le resultat : il aurait fallu ne quarrer la courbe que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$: en multipliant le résultat de la formule par $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, on aurait eu la longueur de $\frac{\pi}{6}$; mais, nous n'avions ici pour objet que de comparer notre formule (F_{24}) avec le résultat de M. *Kramp*. Pour approcher davantage la valeur de π, il faudrait prendre pour x la tangente d'un très-petit arc sous-multiple de 30°, et appliquer la formule (F_{24}). (Voy. note 4)

Ce

Ce géomètre, pour n'avoir pas fait attention au point d'inflexion, a été conduit à des conséquences fausses : en effet, sa formule n.° 8 lui a donné plus d'exactitude que celles des n.os 9 et 10, ce qui présentait un vrai paradoxe ; mais il faut remarquer que pour la formule n.° 8, il a pu s'opérer entre les aires des deux branches de la courbe, une compensation d'erreur qui a pu être plus favorable que pour les n.os 9, 10, 11. (Voy. note 4.)

63. Je crois pouvoir conclure de tous les essais que j'ai faits, qu'au moyen de nos formules (F_6), (F_8), (F_{10}), (F_{12}), (F_{24}), (F_{120}), on tire tout le parti possible d'un nombre donné d'ordonnées, et que l'emploi de ces formules offre le moyen, à la fois le plus exact et le plus expéditif, d'intégrer les différentielles d'une seule variable. On peut, pour les diverses applications, consulter les mémoires cités dont les formules s'appliquent à la manière des nôtres.

Les géomètres sentiront que cette manière de déterminer les coefficiens d'une formule par des expériences faites sur des cas connus, dispense l'analiste d'une foule de raisonnemens dont l'algèbre fait tous les frais. L'esprit de cette méthode peut avoir bien d'autres applications utiles.

Notes sur le présent chapitre.

64. *Note* 1.re. Je vais chercher la formule (F_2) par le procédé indiqué (n.° 57); on connaît les trois ordonnées y_0, y_1, y_2 : en faisant successivement

$$x=0,\quad y=y_0;\quad x=\tfrac{1}{2},\quad y=y_1;\quad x=1,\quad y=y_2;$$

dans

$$y=a+bx+cx^2,$$

on a les trois équations

$$y_0=a,\quad y_1=a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{4}c,\quad y_2=a+b+c,$$

desquelles, par élimination, on tire

$$a=y_0\ ,\quad b=-3y_0+4y_1-y_2\ ,\quad c=2y_0-4y_1+2y_2\ ;$$

Mettant ces valeurs de a, b, c dans

$$\int y\mathrm{d}x=ax+\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3\ ,$$

c'est-à-dire, dans

$$\int y\mathrm{d}x=a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c\ ,$$

(en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$), on trouve

$$6\int y\mathrm{d}x=y_0+y_2+4y_1\ ,$$

précisément comme porte le tableau du n.° 60.

Les autres formules de ce tableau se trouveraient par le même procédé; mais le travail devient bientôt impraticable.

Note 2. M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. 7, pag. 241) a fait plusieurs objections contre ma méthode exposée, tom. 7, pag. 101 du même recueil : je vais y répondre, en évitant, autant que je pourrai, le ton aigre de ce géomètre.

Il dit (pag. 244) « L'opération connue des soustractions réitérées ne suffira » pas pour diminuer chaque fois d'une unité le nombre des inconnues, ce » qui rendra la résolution complète des treize équations beaucoup plus laborieuse » qu'on ne pense » : c'est là une erreur palpable : en disant qu'il fallait combiner les deux équations voisines, je n'avais pas cru nécessaire d'ajouter qu'il fallait préalablement multiplier l'une d'elles par le nombre convenable, avant de faire la soustraction : avec cette explication, un coup-d'œil sur les équations à éliminer suffit pour apercevoir que chaque opération fait disparaître une inconnue.

Note 3. M. *Kramp*, pag. 245, dit que ma méthode n'est pas applicable aux diviseurs impairs : c'est encore là une erreur manifeste, et ma méthode n'exige aucune modification pour le cas dont il s'agit.

Qu'il s'agisse, en effet, de trouver (F_5) : en faisant (fig. 15) $AC=1$ et $AB=10$ (pour simplifier le calcul), et prenant, pour courbe d'expérience,

$$y=x^0=1\ ,\quad y=\frac{x^2}{5^2}\ ;\quad y=\frac{x^4}{5^4}\ ;$$

on obtient les trois équations

$$A+B+C=5\,,\quad 5^2A+3^2B+C=\frac{5^3}{3}\,,\quad 5^4A+3^4B+C=\frac{5^5}{5}\,,$$

desquelles on conclut, sans difficulté, la formule (F_5, après avoir divisé A, B, C par 10.

Note 4. En appliquant ces douze formules à la détermination de π, M. *Kramp* a formé un tableau où l'on observe, 1.° que les erreurs sont tantôt positives, tantôt négatives ; 2.° que la formule du n.° 8 est plus exacte que les suivantes, 9.me, 10.me, 11.me. Cette singularité avait été remarquée par M. *Kramp* (tom. 6, pag. 379) ; mais, j'ai osé en rechercher la cause : je l'ai expliquée par un point d'inflexion dans la courbe à quarrer, circonstance qui avait échappé à M. *Kramp*. Ce géomètre ne veut point de mon explication, et s'indigne presque de ma témérité : il explique le paradoxe par un raisonnement qui me paraît tout-à-fait étranger à la question.

On a déjà vu que ce paradoxe n'a point lieu pour Log.2 (Voy. le tableau du n.° 62) : j'ai appliqué les formules à plusieurs autres courbes sans inflexion, aucune anomalie n'a paru : je les ai appliquées ensuite à des courbes à inflexion, le même paradoxe a reparu.

Veut-on un exemple bien frappant de l'influence des points d'inflexion ? Qu'on applique les formules à la parabole cubique $y-\frac{1}{2}=4(x-\frac{1}{2})^3$: on trouvera, par toutes les formules du tableau, sans distinction, que l'aire de l'espace compris entre l'abscisse $x=1$, l'ordonnée extrême $y=1$, et l'arc de courbe passant par l'origine, est exactement $\frac{1}{2}$: ainsi, la formule (F_1), qui n'emploie que les deux ordonnées extrêmes, est ici aussi exacte que toutes les autres : voici l'explication de cette singularité. Si l'on imagine un quarré construit sur $x=1$ et $y=1$, le centre de ce quarré coïncidera avec le point d'inflexion de la courbe ; l'aire donnée par la formule (F_1) n'est autre chose ici que l'aire du triangle rectangle moitié du quarré ci-dessus ; or, ce triangle est exactement égal à l'aire mixtiligne que l'on cherche, parce que la diagonale du quarré, laquelle passe par les points extrêmes de la courbe et par le point d'inflexion, forme deux segmens paraboliques égaux, l'un dans le triangle, l'autre en dehors ; en sorte qu'il s'opère une compensation exacte qui rend le triangle égal à l'aire curviligne cherchée.

Enfin, veut-on une preuve tirée de la courbe même qui a présenté à M. *Kramp* le paradoxe dont il s'agit ? Il suffit d'appliquer les formules à la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; car, entre ces limites, il n'y a pas d'inflexion : pour cela, il faut faire successivement, pour (F_{12}),

$$x=0\ ,\quad x=\frac{1}{12\sqrt{3}}\ ,\quad x=\frac{2}{12\sqrt{3}}\ \ldots\ldots\ldots\ x=\frac{12}{12\sqrt{3}}\ ,$$

pour avoir y_0, y_1, y_2, ... y_{12}, et multiplier le résultat de la formule par $\frac{1}{\sqrt{3}}$: on aura ainsi la longueur de l'arc $\frac{\pi}{6}$, et l'on trouvera

$$\pi=3,14159265359 7\ ,$$

résultat trop fort de 0,000 000 000 008 ; mais cependant plus exact que celui obtenu sur l'arc $\frac{\pi}{4}$ affecté d'un point d'inflexion : si ensuite, on répète le calcul sur (F_2), (F_4), (F_6), (F_8), (F_{10}), on trouve que les erreurs vont en diminuant, qu'elles sont toutes positives, ou, dans le même sens, comme cela doit être : ainsi disparaît le paradoxe en question.

En voilà assez, je pense, pour légitimer ce que j'avais dit sur les points d'inflexion, et pour prouver que, si on néglige les points singuliers, on perd la certitude de la coïncidence de la courbe parabolique avec la proposée, et que dès-lors la méthode parabolique d'approximation perd aussi une partie de sa supériorité sur celle des séries. (Voyez le *Mémoire de M. Servois*, ANNALES, tom. 8, pag. 73.)

Note 5. M. *Ampère*, dans son rapport, a dit que le nombre des coefficiens est $\frac{n}{2}$ pour le cas des n intervalles pairs, et $\frac{n+1}{2}$ pour le cas impair ; c'est sans doute, par inadvertance : un coup-d'œil sur le tableau des formules fait voir que ce nombre des coefficiens est $\frac{n}{2}$ dans le cas pair, et $\frac{n+1}{2}$ dans le cas impair.

M. *Ampère* dit encore que quelles que soient les courbes d'expériences que l'on choisira, pourvu que y soit une fonction rationnelle entière de x, dont le degré ne passe pas n, les coefficiens A, B...... seront toujours les mêmes : cette conclusion doit être restreinte : en effet, il est facile de s'assurer par l'expérience, 1.° que deux équations du même degré, comme $y=a$ et $y=a+bx$, ne peuvent pas être employées simultanément pour trouver la même formule, parce qu'elles se comportent l'une l'autre, et qu'ensemble elles ne fournissent qu'une seule expérience ; 2.° qu'il en est de même des équations $y=kx^{2p}$ et $y=kx^{2p+1}$; 3.° que les courbes d'expériences doivent comprendre tous les degrés pairs, depuis $y=x^0$ jusqu'à $y=x^n$, quoiqu'on puisse substituer à un

degré pair le degré impair immédiatement supérieur, en renonçant à la simplicité des calculs ; 4.° que, si quelque courbe d'expérience passe le degré n, la formule qui en résulte est moins simple et, en général, moins exacte que sa correspondante dans le tableau n.° 60 ; parce qu'elle n'est pas identique avec celle que l'on obtient par le procédé de la note 1.

J'aurais dû, sans doute, insérer ces éclaircissemens dans le mémoire que j'ai adressé à l'Académie. Quoi qu'il en soit, M. *Ampère* a une célébrité trop bien acquise, et il aime trop la vérité, pour prendre en mauvaise part les précédentes observations.

Note 6. J'arrive au reproche le plus grave de M. *Kramp* : il affirme (*Annales*, tom. 7, pag. 245) que ma formule $(F_{1}{}_{2})$ est *entièrement fausse et erronnée*, et il en apporte, pour preuve unique, qu'elle est différente de la sienne qui est nécessairement exacte.

Je réponds, 1.° que ma formule $(F_{1}{}_{2})$ a donné plus d'approximation que celle de M. *Kramp*, dans les deux applications que j'ai rapportées, ce qui établit une première probabilité en ma faveur ; 2.° qu'après avoir refait mes calculs, j'ai retrouvé les mêmes coefficiens ; 3.° que MM. *Servois* et *Wronski* sont parvenus à ma formule par des méthodes qui leur sont propres.

Avant de connaître la réfutation complète que M. *Servois* a faite de toutes les objections de M. *Kramp*, et désirant que les géomètres ne conservassent aucun doute sur l'exactitude de mes formules reconnues utiles par l'académie, j'avais imaginé de faire proposer à M. *Kramp* un expédient qui avait plusieurs avantages, celui de terminer promptement les incertitudes, celui de rendre les auteurs plus circonspects et les critiques plus honnêtes.

Nous aurions déposé, M. *Kramp* et moi, chacun 1000 francs au secrétariat de l'académie, en la suppliant de faire vérifier ma formule $(F_{1}{}_{2})$, et d'employer les 1000 francs du perdant à un prix sur une question à son choix.

Mais, depuis le mémoire de M. *Servois*, il y aurait peu de générosité de ma part à insister sur ce défit.

Note 7. Dans l'état actuel de l'analise, la méthode parabolique d'approximation est, sans doute, préférable à toutes les autres : remarquons cependant qu'on peut substituer à la courbe à quarrer, non seulement une courbe du genre parabolique, mais encore une autre courbe quelconque qui diffère très-peu de la proposée, par exemple, la développante qui passe par un nombre donné des points pris sur la proposée : cette réflexion ouvre un vaste champ aux recherches.

Voici un essai de ce genre qui pourra paraître intéressant. Il s'agit de quarrer l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$, ou d'intégrer $\frac{dx}{x}$: je mets x^{1+n} pour x, et j'ai la courbe $y=\frac{1}{x^{1+n}}$ qui coïncide d'autant mieux avec l'hyperbole que n est plus petit.

Il s'agit à présent d'intégrer $\frac{dx}{x^{1+n}}$: l'intégrale est $-\frac{1}{nx^n}+c=\int y dx$. En prenant cette intégrale depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$, elle donne $\text{Log}.2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n.2^n}$.

Voilà donc une expression algébrique de Log.2 qui sera d'autant plus exacte qu'on prendra n plus petit. Si, par exemple, on fait $n=0,0001$, on trouve $\text{Log}.2=0,69$: si on prend pour n un multiple de $\frac{1}{2}$, on pourra, par des extractions successives de racines quarrées, approcher aussi près qu'on voudra de la vraie valeur de Log.2, sans employer des tables de logarithme.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Paris, le 18

LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE pour les sciences mathématiques, certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du lundi 10 février 1817.

Rapport sur un mémoire de M. *Bérard*, intitulé : *Méthode nouvelle pour quarrer les courbes et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable.*

N.° 65.

Le mémoire de M. *Bérard*, dont l'académie nous a chargé de lui rendre compte, a pour objet de trouver, par un procédé plus simple que ceux dont on a fait usage jusqu'à présent, la valeur approchée d'une intégrale dont la fonction dérivée et les limites sont données. On sait qu'il faut pour cela substituer à cette fonction dérivée une expression de la forme

$$a+bx+cx^2+\text{etc.},$$

où x représente la variable indépendante ; déterminer a, b, c, etc., de manière que les valeurs de cette expression et de la fonction dérivée correspondantes à des valeurs équidistantes de x en nombre égal à celui des coefficiens a, b, c, *etc.*, soient respectivement égales ; substituer ces valeurs dans l'expression

$$ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \text{etc.} \; ,$$

qui est l'intégrale de

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.})dx \; ,$$

et prendre la différence des deux valeurs de cette dernière expression qui répondent à celles de la variable x aux deux limites.

Ce calcul est assez court quand les valeurs équidistantes de x sont en petit nombre entre ces deux limites ; mais, dès que le nombre est un peu considérable, il devient tellement compliqué qu'on doit le regarder comme presque inexécutable. M. *Bérard* s'est proposé de trouver la formule qui en résulte, sans être obligé de faire le calcul comme nous venons de le dire ; il remarque pour cela

1.° Qu'en représentant y_0, y_1, y_2, ...y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, les valeurs de la fonction dérivée qui répondent aux valeurs équidistantes de x, ce résultat est égal à une fonction de y_0, y_1, y_2,.......y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, où ces quantités ne peuvent entrer qu'au premier degré.

2.° Que celles qui se trouvent à égale distance des deux extrêmes y doivent avoir les mêmes coefficiens, en sorte que ce résultat peut être représenté par

$$A(y_0 + y_n) + B(y_1 + y_{n-1}) + C(y_2 + y_{n-2}) + \text{etc.} \; ;$$

en sorte que pour l'avoir il suffit de déterminer A, B, C, etc. ; qui ne peuvent dépendre que du nombre des valeurs équidistantes de x que l'on considère, et qui sont par conséquent les coefficiens numériques qu'il suffit de déterminer une fois pour toutes, relativement à chaque valeur particulière de ce nombre.

M. *Bérard* donne, dans son mémoire, une méthode très-simple pour parvenir directement à cette détermination ; cette méthode conduit aux mêmes valeurs pour les coefficiens dont nous parlons, que

que le procédé de substitution et d'intégration que nous venons d'indiquer. Il nous semble que l'auteur aurait rendu son mémoire plus complet en en faisant l'observation, et en en donnant une démonstration qui ne laissât rien à désirer; c'est pourquoi nous croyons devoir expliquer ici sa méthode d'une manière un peu différente de celle qu'il a adoptée, afin que cette démonstration naisse, pour ainsi dire, de l'exposition même du procédé qui y conduit.

Le nombre des coefficiens à déterminer est évidemment $\frac{n}{2}$ quand le nombre n des intervalles est pair, et $\frac{n+1}{2}$ quand il est impair, tel est donc le nombre des équations entre ces coefficiens qu'il faut obtenir pour les déterminer.

Prenons une courbe qui soit un cas particulier quelconque de l'équation

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.}$$

La formule

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.};$$

en supposant qu'on en eût calculé les coefficiens A, B, C, etc., par le long procédé décrit au commencement de ce rapport, représenterait rigoureusement l'aire de cette courbe entre des limites données; d'où il suit que si d'une part on calcule directement cette aire, et que de l'autre on prenne les valeurs de y_0, y_1, y_2,..... y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, correspondantes à ce cas particulier pour les substituer dans

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.},$$

et égaler le résultat à la valeur trouvée pour l'aire, on aura une équation du premier degré exactement satisfaite par les valeurs de A, B, C, etc.

En prenant une autre courbe dont l'équation soit aussi renfermée comme cas particulier dans l'équation

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.} ;$$

et, en répétant les mêmes opérations, on trouvera de même une seconde équation du premier degré entre A, B, C, etc.

Après avoir pris autant de ces cas particuliers qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant que n est pair ou impair ; on aura donc autant d'équations du premier degré entre A, B, C, etc., qu'il y a de ces inconnues, et leur détermination ne souffrira plus alors aucune difficulté.

Il est évident que tant qu'on aura pris pour chaque cas particulier une valeur de y comprise dans l'équation

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.} ;$$

c'est-à-dire, une fonction rationnelle entière de x dont le degré ne passe pas n, on trouvera, pour A, B, C, etc., les mêmes valeurs que par le procédé ordinaire, décrit au commencement de ce rapport ; et comme ces valeurs sont uniques, il est clair que quels que soient les cas particuliers qu'on choisisse, on arrivera toujours identiquement aux mêmes résultats ; c'est ce que M. *Bérard* ne parait pas avoir remarqué ; car, il dit, après avoir expliqué les cas particuliers, qu'il a choisi et qu'il nomme courbes d'expériences.

« Tout autre système de courbes d'expérience fournirait des for-
» mules différentes qui seraient toujours moins simples, qui exigeraient
» une élimination plus difficile, et qui, en général, seraient moins
» exactes. »

Cela n'est vrai que dans le cas où l'on prendrait pour la valeur de y une fonction rationnelle entière de x, d'un degré plus élevé que le nombre n des intervalles, parce qu'alors cette valeur de y ne serait plus comprise dans la formule

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.};$$

dont on est parti pour établir que la valeur de l'intégrale est représentée par

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.},$$

où A, B, C, etc., ont toujours les mêmes valeurs, quelles que soient celles de a, b, c, etc.

Mais, il existe une infinité de fonctions rationnelles de x dont le degré ne passe pas le nombre n, qui peuvent également servir, et qui donneront toutes identiquement le même résultat. Le passage du mémoire de M. *Bérard* doit donc être modifié, et il aurait dû se borner à dire que les équations paraboliques monomes de degré pair dont il se sert pour trouver les formules qu'il cherche sont les plus commodes à employer dans la pratique. Cette observation ne fait rien, au reste, à l'utilité qu'on peut retirer du mémoire de M. *Bérard* et des formules, toutes calculées, qu'il contient pour des nombres d'intervalles égaux à 1, à 2, à 3, à 4, à 5, à 6, à 8, à 12 et à 24. Nous pensons, en conséquence, que ce travail mérite l'approbation de l'académie, et qu'il serait à désirer qu'il fût publié, et qu'on fît connaître cette méthode, qui est susceptible d'utiles applications, dans les ouvrages élémentaires.

Signés à la minute, POINSOT, AMPÈRE, *rapporteur*.

L'Académie approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original,

Le Secrétaire perpétuel, chevalier des Ordres Royaux de St-Michel et de la Légion d'honneur,

DELAMBRE.

CHAPITRE IX.

CUBATURE DES SOLIDES ET QUADRATURE DE LEUR SURFACE.

LA méthode que j'ai exposée dans le chapitre VIII, pour quarrer les surfaces, s'applique, sans difficulté et avec avantage, à la cubature des solides. Je vais parcourir quelques cas généraux, et donner quelques applications propres à faciliter l'emploi de la méthode.

Parallélipipède recouvert par une surface courbe.

66. On sait qu'un prisme triangulaire, tronqué par un plan incliné à sa base, est égal au produit de cette base par le tiers de la somme des trois arêtes, si le prisme est droit, ou par le tiers des trois hauteurs, si le prisme est oblique.

Si l'on a un parallélipipède, tronqué par un plan incliné à sa base, dont les hauteurs des arêtes soient h, h', h'', h''', b la surface de la base, et V le volume; en le décomposant en deux prismes triangulaires par un plan passant par h et h'', on aura, d'après l'article précédent,

$$V = \tfrac{1}{2} b . \frac{h+h'+h''}{3} + \tfrac{1}{2} b \frac{h+h''+h'''}{3} :$$

Décomposant de nouveau le parallélipipède par un plan passant par h' et h''', on aura semblablement

$$V = \tfrac{1}{2} b . \frac{h + h' + h'''}{3} + \tfrac{1}{2} b . \frac{h' + h'' + h'''}{3} .$$

Ajoutant les deux équations ci-dessus, il vient

$$V = b . \frac{h + h' + h'' + h'''}{4} ;$$

ou

$$V = b . \frac{h + h''}{2} = b . \frac{h' + h'''}{2} ;$$

théorème simple que je n'ai pas rencontré dans les livres élémentaires.

67. Imaginons maintenant un parallélipipède recouvert par une surface courbe : si on le coupe par des plans équidistans et parallèles aux faces, il sera décomposé en petits parallélipipèdes ayant tous la même base *b*. En ajoutant tous ces parallélipipèdes, et faisant la réduction, on trouve la règle suivante.

Ajoutez ensemble, 1.° toutes les hauteurs des arêtes intérieures ou invisibles; 2.° la moitié de toutes les hauteurs des arêtes extérieures ou de faces visibles, à l'exception de celles des quatre angles; 3.° le quart des hauteurs des arêtes des quatre angles. Multipliez cette somme totale par la base *b*, commune à tous les parallélipipèdes partiels : le produit sera le volume cherché *V* du parallélipipède curviligne.

Si la base du solide, au lieu d'être un parallélogramme, était un triangle *ABC* qui en est la moitié, on diviserait *AB* et *AC* en un même nombre de parties égales, et l'on mènerait, par les points de divisions, des parallèles à *AB*, *AC*; la règle précédente s'appliquerait ici, mot à mot, avec cette seule différence, qu'au lieu de prendre le quart des hauteurs des arêtes en *B* et *C*, il ne faudrait en prendre que le huitième.

Cette règle fort simple donne le volume du polyèdre inscrit dans la surface courbe : elle donne une approximation d'autant plus grande,

que le nombre des petits parallélipipèdes est plus grand : on verra plus bas une méthode plus rigoureuse.

Des solides de révolution.

68. En représentant par π le rapport 3,1415926 du diamètre à la circonférence, on sait que l'expression du volume d'un solide de révolution est

$$V=\pi\int y^2 dx \;,$$

expression dans laquelle x est l'abscisse et y l'ordonnée de la courbe qui engendre le solide, en tournant autour de l'axe des x.

En faisant $y^2=z$, on a

$$V=\pi\int z dx \;,$$

et l'on voit que la question se réduit à quarrer la courbe dont les abscisses sont x, et les ordonnées z ou y^2. Les formules du n.° 60 s'appliquent donc ici en y mettant $\frac{V}{\pi}$ pour S et y_0^2, y_1^2, y_2^2.... pour y_0, y_1, y_2,.......

Ainsi, par exemple, si l'on a partagé en six l'intervalle a des ordonnées extrêmes y_0, y_6, la formule (F_6) qu'il faudra employer, deviendra

$$\frac{840}{\pi a}.V=41(y_0^2+y_6^2)+216(y_1^2+y_5^2)+27(y_2^2+y_4^2)+272y_3^2.$$

y_0, y_1, y_2........, devront être calculées par l'équation $y=X$ de la courbe, si elle est donnée, ou mesurée sur le solide lui-même, si l'équation n'est pas connue.

Des solides curvilignes quelconques.

69. Nous allons examiner maintenant le cas le plus général, celui d'un solide dont la base quelconque est recouverte par une

surface courbe quelconque dont on a ou dont on n'a pas l'équation.

On sait que l'expression du volume d'un solide est

$$V=\int\int z\,dx\,dy=\int dx\int z\,dy\ .$$

Imaginons qu'ayant divisé en parties égales, en six, par exemple, l'axe des x compris entre les plans extrêmes qui renferment le solide proposé, on ait conduit par les points de division des plans parallèles aux précédens ou à celui des yz, la surface de chacune de ces sections sera exprimée par $\int z dy$: nommons S_0, S_1, S_2......S_6 ces surfaces, et S l'une quelconque d'entre elles : l'expression ci-dessus du solide deviendra

$$V=\int S dx\ .$$

En considérant S comme l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, l'aire de cette courbe représentera $\int S dx$, c'est-à-dire, V : on aura donc, pour le cas actuel de six divisions, la valeur de V, par la formule (F_6) du n.° 60, qui deviendra, en appelant a l'intervalle des plans extrêmes

$$\frac{840}{a}\cdot V=41(S_0+S_6)+216(S_1+S_5)+27(S_2+S_4)+272S_3\ .\quad (F_6)$$

Pour faire usage de cette formule, il faut préalablement trouver les valeurs de S_0, S_1.......S_6. Pour distinguer plus clairement les quarante-neuf verticales z que renferment les sept sections S_0, S_1......S_6, concevons que (fig. 16) l'axe AX des x ou a, et l'axe AY des y ou y_0 portent, à partir de l'origine A, les numéros 0, 1, 2.......6, que chaque ordonnée y_1, y_2.......y_6, soit aussi divisée en six parties égales, et qu'enfin on ait joint par une courbe les points de division des sept ordonnées y ; les 49z correspondans aux quarante-neuf points d'intersections, pourront être distingués par la combinaison de deux accens correspondant aux numéros des deux axes. Ainsi, les z élevés sur y_0 seront ${}^0z_0$,

${}^{0}z_1$, ${}^{0}z_2$, ${}^{0}z_3$, ${}^{0}z_4$, ${}^{0}z_5$, ${}^{0}z_6$ pour la section S_0 ; c'est-à-dire, pour le plan coordonné yz : de même les z seront marqués par ${}^{1}z_0$, ${}^{1}z_1$, ${}^{1}z_2$, ${}^{1}z_3$, ${}^{1}z_4$, ${}^{1}z_5$, ${}^{1}z_6$ pour la section S_1, passant par y_1, et ainsi de suite, en sorte que l'accent d'en haut indique la section, et celui d'en bas la courbe.

En vertu de cette notation, S_0, S_1....... seront données par les sept formules suivantes qui sont la traduction de (F_6) du n.° 60.

$$\frac{840}{y_0}.S_0=41({}^{0}z_0+{}^{0}z_6)+216({}^{0}z_1+{}^{0}z_5)+27({}^{0}z_2+{}^{0}z_4)+272\,{}^{0}z_3\ ,$$

$$\frac{840}{y_1}.S_1=41({}^{1}z_0+{}^{1}z_6)+216({}^{1}z_1+{}^{1}z_5)+27({}^{1}z_2+{}^{1}z_4)+272\,{}^{1}z_3\ ,$$

....

$$\frac{840}{y_6}.S_6=41({}^{6}z_0+{}^{6}z_6)+216({}^{6}z_1+{}^{6}z_5)+27({}^{6}z_2+{}^{6}z_4)+272\,{}^{6}z_3\ ,$$

Si l'équation de la surface n'est pas connue, il faudra mesurer les quarante-neuf verticales z sur le solide même.

Si l'équation de la surface est donnée en y faisant $z=0$, on aura $y=X$ pour celle de son intersection avec le plan des xy, et celle-ci fera connaître y_0, y_1.......y_6 : on aura ensuite les z de la première section S_0 en mettant dans $z=f(x, y)$, o pour x, et o $\frac{y_0}{6}$, $\frac{2y_0}{6}$, $\frac{3y_0}{6}$, $\frac{4y_0}{6}$, $\frac{5y_0}{6}$, y_0 pour y, et ainsi de suite pour les autres sections.

Si la base ou plan des xy n'était pas rencontrée par la surface, mais était enveloppée par une surface cylindrique recouverte par la surface $z=f(x, y)$, l'équation de la courbe intersection de la surface cylindrique avec le plan des xy serait connue, et de cette forme $y=X$; ce qui ferait connaître y_0, y_1.........y_6. On calculerait ensuite les z comme dans le cas précédent.

Le cas d'un parallélipipède recouvert par une surface courbe est une variété du précédent.

70.

70. *Exemple* 1. Imaginons une demi-sphère dont le rayon est $\sqrt{2}$] posée sur sa base que je prends pour plan des xy : concevons un quarré inscrit dans le cercle de cette base, et un parallélipipède ayant pour base ce quarré : on demande le volume de ce parallélipipède recouvert par une portion de la surface sphérique.

L'équation de la surface sera

$$z=\sqrt{2-x^2-y^2}] ,$$

et il est évident qu'il suffira de chercher le volume de la portion du solide ayant pour base le quarré inscrit dans l'un des cadrans, laquelle portion sera le quart du solide total : il n'est pas moins évident que le côté du quarré partiel que nous considérons est 1.

Pour abréger l'opération, je ne supposerai que quatre intervalles dans le côté $=1$ du quarré ci-dessus, et la formule a employer sera

$$90V=7(S_0+S_4)+32(S_1+S_3)+12S_2 ,$$

Pour avoir S_0 ; c'est-à-dire, l'aire du plan des yz, je fais $x=0$ dans $z=\sqrt{2-x^2-y^2}]$, qui devient $z=\sqrt{2-y^2}]$: je mets dans celle-ci pour y successivement 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, et j'ai les cinq verticales ou valeurs de z de la section S_0, laquelle est donnée par l'équation

$$90S_0=7(\sqrt{2}+1)+32(\tfrac{1}{4}\sqrt{31}+\tfrac{1}{4}\sqrt{23})+12.\tfrac{1}{2}\sqrt{7} .$$

Pour avoir S_1, je mets $\frac{1}{4}$ pour x dans $z=\sqrt{2-x^2-y^2}]$, qui devient $z=\sqrt{\frac{31}{16}-y^2}]$, et je substitue pour y successivement 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 ; ce qui donne les cinq valeurs de z de la section S_1, laquelle est à son tour donnée par la formule suivante

$$90.S_1=7(\tfrac{1}{4}\sqrt{31}+\tfrac{1}{4}\sqrt{15})+32(\tfrac{1}{4}\sqrt{30}+\tfrac{1}{4}\sqrt{22})+12.\tfrac{3}{4}\sqrt{3}] .$$

En mettant ensuite $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 pour x dans z, et 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. 1, pour y, on aura de même les cinq valeurs de z pour les sections

S_2, S_3, S_4 ; qui seront données par les équations suivantes :

$$90 S_2 = 7(\tfrac{1}{4}\sqrt{7} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{19}) + 12.\tfrac{1}{4}\sqrt{6} .$$

$$90 S_3 = 7(\tfrac{1}{4}\sqrt{23} + \tfrac{1}{4}\sqrt{7}) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{22} + \tfrac{1}{4}\sqrt{14}) + 12.\tfrac{1}{4}\sqrt{19} .$$

$$90 S_4 = 7(1+0) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{15} + \tfrac{1}{4}\sqrt{7}) + 12.\tfrac{1}{4}\sqrt{3} .$$

Il ne reste plus qu'à mettre, dans la formule qui donne V, les valeurs précédentes de S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, et l'on trouvera

$$V = 1,1356 .$$

La vraie valeur de V que l'on trouve facilement (en remarquant que le solide total proposé vaut la demi-sphère moins quatre demi-segmens sphériques), est

$$V = 1,1370 .$$

On ne sera pas étonné que l'approximation ne soit pas plus grande, si l'on fait attention que la formule employée (F_4) a pour base la division de l'espace à sommer en quatre parties seulement.

71. *Exemple* 2. Nous prendrons, pour deuxième application, le cas d'un solide renfermé entre le plan des xy et une surface courbe qui le rencontre : nous chercherons le volume de $\frac{1}{8}$ de la sphère dont le rayon $=1$: ce segment est compris entre les trois plans coordonnés qui passent par le centre de la sphère ayant pour équation

$$z = \sqrt{[1 - x^2 - y^2]} ;$$

pour plus de brièvete, nous ne supposerons que cinq sections ; S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.

En mettant successivement, dans l'équation de la sphère, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ 1 pour x, et zéro pour z, on a les cinq ordonnées y du

cercle qui est l'intersection de la surface avec le plan des xy; savoir :

$$y_0 = 1\ ,\quad y_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\quad y_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad y_3 = \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\ ,\quad y_4 = 0\ .$$

Pour avoir les cinq verticales z, de la section S_0, je fais $x = 0$ dans l'équation de la surface qui devient

$$z = \sqrt{1 - y^2}\ ,$$

et j'y mets, pour y successivement

$$0\ ,\ \frac{y_0}{4}\ ,\ \frac{y_0}{2}\ ,\ \frac{3y_0}{4}\ ,\ y_0\ ;$$

et j'ai

$$^0z_0 = 1\ ,\quad {}^0z_1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\quad {}^0z_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad {}^0z_3 = \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\ ;\quad {}^0z_4 = 0\ :$$

Pour avoir les cinq z de la section S_1, je fais $x = \frac{1}{4}$ dans

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ ,$$

qui devient

$$z = \sqrt{\tfrac{15}{16} - y^2}\ ,$$

et j'y mets pour y successivement

$$0\ ,\ \frac{y_1}{4}\ ,\ \frac{y_1}{2}\ ,\ \frac{3y_1}{4}\ ,\ y_1\ ;$$

et il vient

$$^1z_0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\ {}^1z_1 = \tfrac{15}{16}\ ,\ {}^1z_2 = \tfrac{3}{8}\sqrt{5}\ ,\ {}^1z_3 = \tfrac{1}{16}\sqrt{7.15}\ ,\ {}^1z_4 = 0\ ;$$

En opérant de même, on trouve que les cinq z de la section S_2, sont

$$^2z_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad {}^2z_1 = \tfrac{3}{8}\sqrt{5}\ ,\quad {}^2z_2 = \tfrac{3}{4}\ ,\quad {}^2z_3 = \tfrac{1}{8}\sqrt{3.7}\ ,\quad {}^2z_4 = 0\ ;$$

que les cinq z de S_3 sont

$${}^{3}z_0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{7}\,,\quad {}^{3}z_1 = \tfrac{1}{16}\sqrt{7.15}\,,\quad {}^{3}z_2 = \tfrac{1}{8}\sqrt{3.7}]\,,\quad {}^{3}z_3 = \tfrac{9}{16}\,,\quad {}^{3}z_4 = 0\;;$$

et que les cinq z de S_4 sont nuls.

Maintenant, il faut chercher les valeurs de S_0 ; $S_1 \ldots\ldots\ldots S_4$, par les équations suivantes :

$$\frac{90}{\gamma_0}.S_0 = 7({}^{0}z_0 + {}^{0}z_4) + 32({}^{0}z_1 + {}^{0}z_1) + 12\,{}^{0}z_2\;.$$

$$\frac{90}{\gamma_1}.S_1 = 7({}^{1}z_0 + {}^{1}z_4) + 32({}^{1}z_1 + {}^{1}z_3) + 12\,{}^{1}z_2\;:$$

$$\frac{90}{\gamma_2}.S_2 = 7({}^{2}z_0 + {}^{2}z_4) + 32({}^{2}z_1 + {}^{2}z_3) + 12\,{}^{2}z_2\;:$$

$$\frac{90}{\gamma_1}.S_1 = 7({}^{3}z_0 + {}^{3}z_4) + 32({}^{3}z_1 + {}^{3}z_3) + 12\,{}^{3}z_2\;;\quad S_4 = 0\;;$$

Il ne reste qu'à substituer ces valeurs de $S_0 \ldots\ldots S_4$, dans la suivante on a $= 1$.

$$\frac{90}{a}.V = 7(S_0 + S_4) + 32(S_1 + S_3) + 12.S_2\;;$$

on trouvera, après les réductions

$$135.V = 7 + 8(\sqrt{15} + \sqrt{7}) + 6\sqrt{3}\;;$$

d'où

$$V = 0{,}5151\;:$$

La vraie valeur est

$$V = 0{,}5236\;:$$

L'approximation trouvée est sans doute bien faible ; mais si, au lieu de vingt-cinq ordonnées z, on en avait employé 6^2, 7^2, 8^2, on aurait approché de plus en plus de la vraie valeur : il ne s'agissait ici que d'indiquer brièvement la marche du calcul.

On se conduirait encore de la même manière dans le troisième cas ; c'est-à-dire, celui où le solide est renfermé entre les plans de xy, une surface cylindrique élevée sur ce plan, et une surface courbe rencontrée par le cylindre.

Des aires des surfaces courbes.

72. L'aire d'une surface courbe s'obtient par la même formule d'intégration que le volume d'un solide : en effet, soit

$$u=F(x,y),$$

l'équation de cette surface, et

$$du=pdx+qdy ;$$

sa différentielle ; l'aire que j'appelle A sera donnée par cette formule

$$A=\int dx\int dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

ou, en posant

$$1+p^2+q^2=z^2 ;$$

par

$$A=\int dx\int zdy,$$

formule qui peut représenter le volume d'un solide, et que l'on traitera précisément comme on a fait dans le précédent article. (Voyez le *Traité du calcul intégral de Lacroix*, in-4.°, tom. II, pag. 198.)

Surfaces de révolution.

73. Soit

$$u=F(x) ;$$

l'équation de la courbe génératrice d'une surface de révolution, et

$$du=pdx ;$$

sa différentielle : la surface A sera, comme on sait, exprimée par

$$A=2\pi\int u\sqrt{dx^2+du^2}=2\pi\int dx\,u\sqrt{1+p^2}\ ;$$

en posant

$$y=u\sqrt{1+p^2}\ ,$$

on aura

$$A=2\pi\int y\,dx\ ,$$

formule que l'on traitera précisément comme celle du n.° 60.

Rectification des lignes à simple et à double courbures.

74. Soit

$$u=F(x)\ ,$$

l'équation d'une courbe plane, et

$$du=p\,dx\ ,$$

sa différentielle : la longueur s de la courbe sera exprimée par

$$s=\int\sqrt{dx^2+du^2}\ ,$$

ou

$$s=\int dx\sqrt{1+p^2}\ ,$$

ou, en posant

$$y=\sqrt{1+p^2}\ ,$$

par

$$s=\int y\,dx\ ,$$

formule qui rentre dans le cas du n.° 60.

Dans le cas d'une courbe à double courbure, soient

$$u=F(x)\ ,\quad t=F'(x)\ ,$$

les projections de la courbe, et

$$du=p\,dx\ ,\quad dt=q\,dx\ ,$$

leurs différentielles : la longueur s d'un arc fini sera exprimé par

$$s=\int\sqrt{dx^2+du^2+dt^2}=\int dx\sqrt{1+p^2+q^2}\ ,$$

ou, en posant

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=y\ ;$$

par

$$s=\int y\,dx\ ;$$

formule qui rentre encore dans le cas du n.° 60.

75. *Observations.* On voit, par ce qui précède, qu'il n'est aucun cas de rectification, de quadrature et de cubature, auquel on ne puisse appliquer la méthode d'approximation fournie par les formules du n.° 60. Sans doute ces formules ne devront être employées que dans les cas où l'intégration ne peut avoir lieu, mais aussi, elles offriront alors le moyen d'approximation le plus prompt et le plus exact, pour intégrer toutes les formules de ces deux formes

$$\int y\,dx\ ;\quad \int dx\int z\,dy\ .$$

J'observerai encore que la méthode dont il s'agit revient, au fond, pour le cas d'un solide, à substituer à l'équation de la surface donnée

$$z=F(x,y)\ ,$$

celle d'une surface du genre parabolique, de cette forme

$$z=(a+bx+cx^2......)(a'+b'y+c'y^2......)$$
$$=A+Bx+Cx^2.....+B'y+C'y^2.....+Kxy+Lx^2y+Mxy^2+Nx^2y^2.....\ ,$$

en déterminant les coefficiens A, B, C......, par la condition que la surface parabolique passe par un nombre 2^2, 3^2, 4^2......n^2 de points de la surface proposée. On pourrait déterminer ces coefficiens en employant des surfaces d'expérience, comme nous avons fait des courbes d'expérience dans le n.° 59, mais ce procédé serait pénible : nous sommes arrivés bien plus simplement au même but, en partant des formules déjà trouvées dans le n.° 60.

Je remarquerai encore que la méthode d'approximation employée pour l'intégration $\int y\,dx$; $\int\int z\,dx\,dy$ peut s'étendre sans difficulté aux formules d'intégrales triples, telles que

$$\int\int\int V\,dx\,dy\,dz\ ;$$

mais ces détails sortiraient des bornes que je me suis prescrites.

CHAPITRE X.

DU TONNEAU ÉLASTIQUE OU THÉORIE NOUVELLE ET PLUS RIGOUREUSE DU JAUGEAGE.

Observations préliminaires.

Le tonneau est non seulement une invention utile dans les arts; mais encore une machine digne de piquer la curiosité des géomètres par les problèmes intéressans qu'elle présente : aussi beaucoup de savans s'en sont-ils occupés. Aucun d'eux cependant ne me paraît avoir deviné la vraie figure du tonneau.

On a considéré, tour-à-tour, la courbe génératriee du tonneau comme une ligne droite, un arc de cercle, un arc d'ellipse, d'hyperbole et de parabole : on a proposé une foule de jauges qui reposent sur de fausses suppositions de la figure du tonneau : quelques-uns de ces instrumens supposent même que tous les tonneaux sont des solides semblables, d'où résultent les erreurs les plus grossières.

M. *Camus* considéra une demi-douve comme formée d'un arc parabolique terminé par une ligne droite tangente à l'extrémité de cet arc. (*Encyclopédie méthodique*, Jaugeage.)

Pour découvrir la vraie figure du tonneau, il ne fallait cependant qu'analiser ce qui se passe dans sa construction. L'ouvrier prépare des douves planes ayant la figure de deux trapèzes réunis par leurs grands côtés parallèles (fig. 18) : après les avoir

avoir rangés cylindriquement, en les faisant toucher par les milieux, il oblige les extrémités divergentes à se rapprocher pour s'adapter contre les deux fonds : des cercles les assujettissent dans cette position, et le tonneau est formé.

On voit que dans cette opération, la douve doit prendre la même courbure que si, étant posée horizontalement sur deux appuis, son milieu était chargé d'un poids : ainsi, sa courbure serait celle d'une lame trapèzoïdale élastique, sans les causes physiques qui modifient le problème.

Ces causes perturbatrices sont, 1.° le défaut d'élasticité parfaite ; 2.° le décroissement de largeur dans la douve ; 3.° le défaut d'homogénéïté du bois ; 4.° l'élasticité variable des différens bois ; 5.° l'influence de l'humidité et de la température ; 6.° l'épaisseur de la douve qui diminue son élasticité ; 7.° le frottement des douves latérales ; 8.° la compression exercée par les cercles additionnels ; 9.° le poids du liquide qui agit inégalement sur les divers points de chaque douve.

On sent bien que la géométrie la plus profonde ne saurait tenir un compte exact de toutes ces causes d'anomalies, et qu'il faudrait chercher la figure particulière de chaque tonneau par l'expérience, pour parvenir à le cuber exactement : cependant, la théorie des douves élastiques donnera toujours une approximation non seulement plus que suffisante pour la pratique, mais sur-tout plus grande que toutes les autres hypothèses gratuites que l'on a imaginées jusqu'à ce jour.

Je donnerai même le moyen d'avoir égard à l'épaisseur de la douve, quand on aspirera à plus de précision. Enfin, je déduirai de ma théorie combinée avec mes expériences sur l'élasticité des bois, une formule pratique aussi simple, mais plus exacte que toutes celles connues.

Cet essai n'est que l'extrait d'un mémoire volumineux que le Ministre de l'Intérieur renvoya, en 1806, à M. *Monge* pour l'examiner, et que ce savant a déclaré avoir égaré.

Courbe génératrice du tonneau.

76. Soient (fig. 17) *ABCO* la section par l'axe d'un quart de tonneau, *CO* le demi-axe $=l$, *CB* le grand rayon $=R$, *OA* le petit rayon $=r$ $BD=R-r=h$, *AB* une demi-douve, $AP=x$ et $PM=y$ les coordonnées d'un point *M* de la courbe.

D'après ce qui précède, il faut concevoir que la demi-douve *AB*, d'abord fixée en *B* perpendiculairement à *BC*, a pris la courbure *AMB* par l'effort d'une force appliquée en *A* vers *O*. Pour découvrir la nature de la courbe *AMB*, nous supposerons, avec *Leibnitz*, 1.° que les rayons de courbure en différens points de la courbe sont en raison inverse des extensions des fibres élémentaires ; 2.° que les allongemens des fibres au point *M*, sont en raison directe du bras de levier *x* de la puissance. De la combinaison de ces deux principes, il résulte qu'en appelant Θ le rayon de courbure, et c^2 une constante, l'équation de la courbe d'une lame élastique mince et rectangulaire est

$$\Theta x=c^2\,, \qquad (1)$$

dx étant constant, on sait que l'on a l'expression

$$\Theta=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}\,,$$

et l'équation (1) devient

$$xdx=\frac{-c^2dx^2d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x^2}{2}+c'=\frac{-c^2dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\,,$$

ou

$$\mathrm{d}y = \frac{-\mathrm{d}x(x^2+2c')}{\sqrt{[4c^4-(x^2+2c')^2]}} ;$$

On détermine la constante c' par la condition qu'au point B on a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ et $x=l$; ce qui donne $2c'=-l^2$, et change l'équation ci-dessus en celle ci

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x(l^2-x^2)}{\sqrt{[4c^4-(l^2-x^2)^2]}} . \qquad (2)$$

Après la seconde intégration, on détermine la nouvelle constante c'' et la première c, par la double condition que pour le point A, on ait $x=0$, $y=0$, et pour le point B, $x=l$, $y=h$.

77. Lorsque le tonneau a peu de courbure, c'est-à-dire, quand $\frac{h}{l}$, est fort petit, on peut avoir une intégrale algébrique fort simple de l'équation (2) ; car, dans ce cas, c^2, est fort grand, et en négligeant $(l^2-x^2)^2$, elle devient

$$2c^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}x(l^2-x^2),$$

dont l'intégrale est

$$2c^2y = l^2x - \frac{x^3}{3},$$

à laquelle il n'y a pas de nouvelle constante à ajouter, parce qu'elle donne $x=0$ quand $y=0$. En déterminant c^2, par la condition qu'on ait $x=l$, quand $y=h$, on a

$$c^2 = \frac{l^3}{3h},$$

et ensuite

$$y = \frac{hx}{2l^3}(3l^2-x^2). \qquad (3)$$

On serait parvenu au même résultat, en négligeant dy^2 dans la valeur de Θ.

Cette équation (3), qui est assez simple, peut être regardée comme une approximation commode et suffisante de la courbe génératrice du tonneau.

Remarque. Si (fig. 17) la force comprimente était dirigée de A vers D, son bras de levier ne serait plus x sur le point M, mais y : l'équation de la courbe serait $\Theta y = c^2$ dont l'intégrale est

$$dx = \frac{dy(y^2 + 2c^2 - h^2)}{\sqrt{[4c^4 - (y^2 + 2c^2 - h^2)^2]}} . \qquad (4)$$

On voit qu'en changeant y en x, la dernière équation est de même nature que (2) ; mais les constantes sont différentes : l'équation (4) est celle d'un arc dont les deux extrémités sont tendues par une corde : c'est encore celle d'un linge chargé d'un fluide pesant. D'*Alembert* (*Encyclopédie*, au mot Élastique), parait avoir confondu les deux cas des équations (2) et (4).

Dans le cas où la lame a peu d'inflexion, c devient très-grand et l'équation (4) se réduit à

$$dx = \frac{c dy}{\sqrt{[h^2 - y^2]}} ;$$

Intégrant, puis déterminant c par la condition qu'on ait $y = h$, quand $x = l = 1$, on a

$$y = h.\text{Sin}.(1,5768x) = h.\text{Sin}.(90^\circ.x) .$$

M. *Poisson* (*Mécanique*, tom. 1, pag. 222) qui a examiné ce dernier cas, met en doute si la courbe oscille de part et d'autre de l'axe des x : je pense que non, et que cela n'a lieu ici que pour avoir supposé c très-grand, ou négligé dy^2 dans Θ.

78. Après avoir déterminé la courbure d'une douve rectangulaire, ce qui nous a donné une première approximation de la courbe géné-

ratrice du tonneau, il faut chercher plus rigoureusement cette courbe, en ayant égard au décroissement de largeur de la douve.

Imaginons le tonneau coupé par des plans passant par l'axe, qui traceront des méridiens sur la surface. La flèche comprise entre deux méridiens très-voisins formera une douve. Les extensions des fibres qui, dans la lame rectangulaire, étaient simplement en raison directe du bras de levier x, sont de plus, en raison inverse, des points résistans ou de la largeur de la douve, quand cette largeur est variable. Il suit de là que le rayon de courbure qui est en raison inverse des bras de levier, est aussi en raison directe de la largeur de la douve : or, cette largeur est proportionnelle au rayon QM ou $(r+y)$ de la section perpendiculaire à l'axe du tonneau (fig. 17) : il s'ensuit que l'équation cherchée de la courbe est

$$\Theta x = c^2(r+y) \qquad (5)$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe génératrice du tonneau : quoique simple, en apparence, je n'ai pu parvenir à l'intégrer : MM. *Lacroix*, *Ampère* et *Petit* qui, à ma prière, s'en sont occupés, n'y ont pas réussi : je l'ai fait proposer dans les *Annales de mathématiques* (tom. 3, pag. 104) : il n'a pas paru de solution.

Voici du moins un moyen d'intégrer l'équation (5) par approximation. Soit $y=F(x)$ l'équation de la courbe cherchée : l'équation (5) deviendra

$$\frac{-c^2dx^2d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{xdx}{r+F(x)},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{-c^2dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\int\frac{xdx}{r+F(x)} \qquad (6)$$

or, on connait déjà une valeur approchée $F(x)$, savoir ;

$$y = \frac{hx}{2l^3}\,(3l^2 - x^2)\;,$$

trouvée n.° 77 : on pourra donc intégrer le second membre de (6) et procéder à la seconde intégration, attendu que les variables seront séparée.

Par ce procédé, on ne fait que substituer à la loi rigoureuse du décroissement de largeur des douves, une autre loi fort approchante donnée par une douve fictive très-peu différente de la véritable.

On peut aussi prendre, pour $y = F(x)$, un arc de section conique passant par les extrémités A et B de la demi-douve, et par son milieu dont les coordonnées sont toujours, à très-peu près,

$$x = \tfrac{1}{2}l\,,\quad y = \tfrac{11}{16}h\;.$$

L'hyperbole sur-tout coïncidera sensiblement avec la vraie courbe : cette hyperbole, dont B est le sommet et BC l'axe, a pour équation

$$y = 2{,}6h - \frac{2h}{l}\sqrt{1{,}69l^2 - 2{,}1lx + 1{,}05x^2}\;;$$

cette valeur de y étant mise dans (6) pour $F(x)$, l'intégration sera plus facile que par la première valeur de $F(x)$.

Enfin, il serait possible de trouver pour y une fonction de x, qui, en coïncidant sensiblement avec la courbe à trouver, procurât deux intégrales algébriques successives ; mais il est difficile d'éviter les points singuliers de cette courbe fictive dans l'étendue de AB.

Remarque. Il est un cas qui mérite d'être examiné, c'est celui où l'on se proposerait de faire un tonneau sans fonds avec des douves décroissantes, semblables aux flèches d'un globe, ou aux côtes d'un melon, lesquelles seraient liées entre elles par un fil tendu d'un pôle à l'autre.

Dans ce cas où les y sont les bras de levier, l'équation de la courbe, d'après ce qui précède, est $\Theta y = c^2(r+y)$ ou, à cause de $r=0$ $\Theta = c^2$, c'est-à-dire que le rayon de courbure est constant, et que par conséquent la courbe est un arc de cercle. Ainsi, pour que le tonneau devienne une sphère, il suffit que $l=R=h$: ce tonneau, s'il était construit avec des flèches d'acier, offrirait l'effet curieux d'un ballon métallique élastique, sans vides entre les joints des douves.

En intégrant $\Theta = c^2$, on trouve, pour l'équation de l'arc de cercle générateur,

$$y^2+x^2-2lx+\frac{l^2-R^2}{R}y=0\ ;$$

le tonneau a, en général, la forme d'un anneau engendré par un segment de cercle tournant autour de sa corde. Si $l=0$ l'anneau est engendré par un cercle entier dont R est le diamètre, tournant autour de sa tangente en C; mais, si $l=R$, l'équation précédente se réduit à $y^2=2lx-x^2$, et fait voir que le tonneau est alors une sphère dont le rayon est $l=R$.

De la figure du merrain ou de la douve encore plane.

79. Nous avons vu qu'en donnant aux douves encore planes la forme trapézoïdale, il restait un vide entre les joints; ce vide disparait par la forte compression qui resserre les extrémités et le milieu des douves. Si on donnait au merrain la figure curviligne assignée par la théorie, le contact serait égal et plus intime, dans toute la longueur des joints ; le suintement du liquide n'aurait plus lieu quand le tonneau est sec : il en résulterait un grand perfectionnement pour l'art du tonnelier : voyons donc quelle doit être la figure du merrain $AM'B$ (fig. 18).

Nous avons vu (n.° 78) que la largeur de la douve doit être proportionnelle au rayon $(r+y)$ de la section que l'on considère ;

c'est-à-dire, qu'on doit avoir $PM' : BR :: r+y : R$: d'ailleurs, les lignes TP et TR ne sont autre chose que les développemens des arcs AM et AB de la figure 17 : en appelant donc $PT=s$, $PM'=z$, $BR=\Delta$, on aura

$$Rz=\Delta(r+y) \; ; \qquad (7)$$

on a d'ailleurs

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2} \; ;$$

lors donc qu'on aura mis dans (7) pour y sa valeur en fonction de s déduite simplement de l'équation (3) ou de l'hyperbole du n.° 78, on aura la relation entre s et z ; c'est-à-dire, la courbe $AM'B$.

J'ai calculé la table ci-après qui fait connaître la largeur de la douve ou le rapport $\frac{z}{\Delta}$, pour tous les rapports $\frac{r}{R}$, des tonneaux usités, et pour dix points équidistans de la demi-douve.

80. Soit, par exemple,

$$r=425 \; , \quad R=545 \; ;$$

je divise 425000 par 545 ; le quotient est 780 que je cherche dans la première colonne à gauche : les nombres 780 ; 820 ; 848 ...... 1000 de la bande horizontale expriment les largeurs $M'M'$ de la douve correspondante à $s=0$, $s=1$, $s=2$ ...... $s=10$, la plus grande largeur BB étant supposée 1000.

Si le quotient ne se trouve pas dans la colonne $\frac{r}{R}$, on prendra des nombres proportionnels entre ceux des deux bandes entre lesquelles tombe le quotient trouvé.

Il faut remarquer que les faces des joints doivent être inclinées et dirigées vers l'axe du tonneau : cette inclinaison est variable et se construit en faisant pour chacun des dix points M', un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont $r+y$, et l'autre est $M'M'$.

Table

Table des largeurs de la demi-douve divisée en dix parties dans sa longueur.

$\frac{r}{R}$; 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
700	746	790	833	872	908	939	964	983	996	1000
740	780	819	856	890	920	947	968	985	996	1000
780	814	847	878	907	933	955	974	987	997	1000
820	848	875	900	924	945	963	978	990	997	1000
860	882	903	922	941	957	971	983	992	998	1000
900	915	931	944	958	969	979	987	994	998	1000
940	949	958	967	974	981	987	993	996	999	1000
980	983	986	989	992	994	996	998	999	1000	1000

D'après ce qui précède, rien ne sera plus aisé que de donner à un ouvrier le modèle d'une douve parfaite pour un tonneau proposé.

Il est encore deux remarques utiles au perfectionnement du tonneau; 1.° il est avantageux d'augmenter le nombre des douves : le tonneau qui ne peut être qu'un polyèdre inscrit, coïncide mieux avec la surface de révolution : le nombre des joints étant plus grand, la quantité dont chacun d'eux doit être resserré, est plus petite, le contact devient plus intime et le suintement plus difficile; 2.° la courbure $\frac{h}{l}$ ne devrait pas excéder $\frac{1}{10}$ pour les mêmes motifs, et de plus, les cercles auraient moins de tendance à s'échapper.

Volume ou capacité du tonneau.

81. En conservant les dénominations précédentes; et posant de plus

$$r+y=y' \;;\quad 3,1416=\pi \;;$$

$2V=$ volume du tonneau, on aura

$$V=\pi\int y'^2 dx=\pi y'^2 x-2\pi\int xy'dy' . \qquad (8)$$

Quand le tonneau a peu de courbure, on peut prendre, pour équation de l'arc AM, celle d'une lame élastique rectangulaire. Mettant donc dans (8) pour $dy'=dy$ sa valeur donnée par l'équation (2), le terme $\pi\int xy'dy'$ s'intègre par parties, et remettant de nouveau pour dy' sa valeur, on trouvera aisément

$$V=\pi y'^2 x-\pi y'\sqrt{[4c^4-(l^2-x^2)^2]}+\pi l^2 x-\tfrac{1}{3}\pi x^3+c'' .$$

En déterminant c'', par la condition que $V=0$, quand $x=0$ et $y'=r$, et faisant ensuite $x=l$, $y'=R$, on a

$$\frac{V}{\pi}=lR^2-2Rc^2+\tfrac{2}{3}l^3+c\sqrt{4c^4-l^4}] .$$

Cette formule est d'une application difficile, parce que la détermination de c^2 exige l'intégration préalable de l'équation (2).

82. On a une détermination plus exacte de V, en substituant dans (8) pour $dy'=dy$ sa valeur donnée par l'équation (6); mais les intégrations sont pénibles. J'ai pris la peine de calculer, dans cette hypothèse, la table ci-après dont l'usage est simple.

Soient $D=2R$, $d=2r$, $H=2h$, $L=2l$.

Je représente la formule de capacité du tonneau entier, par

$$V=L(nD^2+n'Dd+n''d^2) , \qquad (9)$$

n, n', n'' étant trois nombres dont la somme vaut $\frac{\pi}{4}$, et qui sont donnés par la table pour chaque tonneau proposé en cette manière.

La première colonne de gauche est la valeur de $\frac{H}{L}$: les nombres qui sont en tête des autres colonnes sont la valeur de $\frac{d}{D}$: chaque case contient les trois nombres n, n', n'', correspondans aux deux rapports $\frac{H}{L}$ et $\frac{d}{D}$. Ces trois nombres sont des dix millièmes et sont censés précédés par o.

Exemple. Soient $D=8$ décimètres, $d=7$, $L=9$; d'où $H=1$, $\frac{H}{L}=0,11$, $\frac{d}{D}=0,87$: la case qui correspond le mieux aux deux rapports 0,11 et 0,87, contient les nombres n, n', n'' qui, étant mis dans la formule (9), la changent en

$$V=9(0,3841.8^2+0,2181.7.8+0,1832.7^2)=411,95 \text{ litres.}$$

	0,95	0,90	0,86	0,82	0,78	0,74	0,70
0,05	3823 2184 1847	3830 2183 1841	3836 2182 1836	3842 2181 1831	3849 2179 1826	3856 2177 1821	3863 2175 1816
0,10	3828 2183 1843	3835 2182 1837	3841 2181 1832	3847 2180 1827	3854 2178 1822	3861 2176 1817	3868 2174 1812
0,15	3837 2180 1837	3844 2179 1831	3850 2178 1826	3856 2177 1821	3863 2175 1816	3870 2173 1811	3877 2171 1806
0,20	3848 2177 1829	3855 2176 1823	3861 2175 1818	3867 2174 1813	3874 2172 1808	3881 2170 1803	3888 2168 1798
0,25	3864 2173 1817	3871 2172 1811	3877 2171 1806	3883 2170 1801	3890 2168 1796	3897 2166 1791	3904 2164 1786
0,28	3875 2170 1809	3882 2169 1803	3888 2168 1798	3894 2167 1793	3901 2165 1788	3908 2163 1783	3915 2161 1778
0,30	3883 2167 1804	3890 2166 1798	3896 2165 1793	3902 2164 1788	3909 2162 1783	3916 2160 1778	3923 2158 1773

83. L'objet que l'on a en vue en formant des hypothèses sur la courbe génératrice du tonneau, c'est de pouvoir determiner V en ne mesurant que les deux diamètres D, d et L. Quoique l'hypothèse des douves élastiques soit, sans contredit, plus rigoureuse qu'aucune autre, nous avons vu combien de causes physiques peuvent en altérer la loi. Lors donc qu'on aspirera à une grande precision, il faudra recourir à une formule independante de toute hypothèse, et fondée uniquement sur la forme particulière de chaque tonneau. La methode exposée (Chap. IX, n.° 68) fournit cette formule.

On mesurera un certain nombre de circonférences c_0, c_1, c_2, ... correspondantes aux divisions égales de l, et en appelant G l'épaisseur des douves, les ordonnées ou rayons des sections circulaires seront

$$y_0 = r = \frac{C_0}{2\pi} - G\,, \quad y_1 = \frac{C_1}{2\pi} - G\,, \quad y_2 = \frac{C_2}{2\pi} - G \ldots\ldots$$

On peut aussi, pour avoir y_0, y_1, y_2 ...., mesurer les distances de la courbe à une ligne parallèle à l'axe, et passant par le bondon.

Ayant substitué les valeurs de y_0, y_1, y_2,....... dans l'une des formules de l'article cité, on aura V avec le degré d'exactitude désiré, mieux et plus promptement que par aucun autre moyen.

Volume d'un segment du tonneau ou vidange.

84. Pour compléter la théorie du jaugeage, il reste à trouver le volume du segment occupé par le liquide, quand le tonneau n'est pas plein, c'est-à-dire, la vidange : ce problème serait difficile dans l'hypothèse de la douve élastique decroissante; mais, il s'agit bien moins d'avoir rigoureusement le volume du segment que son rapport à celui du tonneau, qui est déjà connu : ainsi, en prenant pour courbe génératrice, une courbe simple comme la parabole, l'erreur qui en resulte pour le segment est, en grande partie, compensée

par celle qui affecte le tonneau entier; en sorte que le rapport des deux volumes n'est pas sensiblement altéré.

J'ai donc pris, pour courbe génératrice $y'^2 R^2 - \frac{R^2 - r^2}{l} x'$ dans laquelle $x' = CQ$, $y' = QM$, et j'ai calculé la table suivante qui me paraît fournir le moyen le plus simple pour déterminer la vidange.

Soit K la distance verticale du niveau du liquide au plan horizontal passant par l'axe supposé horizontal du tonneau : la première colonne à gauche exprime les rapports $\frac{R-K}{D}$: les nombres en tête des colonnes sont les valeurs de $\frac{d}{D}$: enfin, les nombres qui sont dans les cases donnent, en millièmes, le rapport du plus petit des deux segmens au tonneau entier. Ce segment est occupé par le liquide, si le niveau est en dessous de l'axe; il est, au contraire, vide quand le liquide est en dessus.

85. *Exemple.* Soient

$$D = 554, \quad d = 477;$$

la distance du liquide à l'extrémité la plus proche du diamètre du bondon; c'est-à-dire, $R - K = 233$: on a

$$\frac{R-K}{D} = 0{,}42, \quad \frac{d}{D} = 0{,}86.$$

Je cherche, dans la première colonne de gauche, le nombre 0,42; et dans la rangée supérieure 0,86. La case correspondante est 393 : j'en conclus que le volume du plus petit des deux segmens est 0,393 du tonneau entier : c'est le rapport de la vidange, si le liquide est plus bas que le centre; mais, dans le cas contraire, le rapport sera 1—0,393 ou 0,607 du tonneau entier.

On sent que, si les deux quotiens trouvés ne se rencontrent pas, soit dans la colonne de gauche, soit dans la bande supérieure, il faudra prendre des parties proportionnelles.

Si le tonneau reposait sur l'un des fonds, on aurait facilement la vidange, en considérant le segment compris entre le liquide et le cercle du bondon, comme une demi-tonneau particulier.

	0,70	0,75	0,80	0,83	0,86	0,89	0,92	0,94	0,96	0,98
0,04	4	4	5	6	7	8	8	9	11	13
0,08	18	19	21	22	24	27	29	31	33	35
0,12	39	42	47	50	53	56	59	61	63	65
0,16	70	75	81	84	87	90	94	96	98	100
0,20	109	114	120	123	126	129	133	135	137	139
0,24	152	156	163	166	169	172	176	178	180	182
0,28	200	205	210	213	216	219	221	223	225	227
0,32	249	254	259	262	264	267	269	271	273	275
0,36	303	307	311	313	315	318	320	321	322	323
0,40	358	361	363	365	367	369	370	371	372	372
0,42	386	388	390	392	393	395	396	396	397	398
0,44	414	416	417	418	420	421	422	422	423	423
0,46	443	444	445	446	446	447	447	448	448	449
0,48	471	471	472	472	473	473	473	474	474	474
0,50	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Accord de la théorie avec l'expérience.

86. Il restait à vérifier jusqu'à quel point la théorie des douves élastiques décroissantes, s'accordait avec l'expérience : il serait illusoire de faire cette vérification sur des tonneaux : ils sont si mal conformés, et tant de causes produisent des anomalies, que chacun d'eux conduirait à une formule différente de capacité.

Il y avait une autre espèce de vérification plus propre à conduire au but : elle consiste à faire ployer des règles en bois ; à mesurer très-exactement les ordonnées des courbes qu'elles prennent, et à en déduire le volume du solide de révolution engendré.

Trois élémens principaux concourent au résultat ; savoir : $\frac{D-d}{L}$, $\frac{d}{D}$, $\frac{G}{L}$; G étant l'épaisseur uniforme de la règle : j'ai varié les expériences sur des règles bien homogènes, les unes rectangulaires, les autres trapézoïdales, plus ou moins épaisses, plus ou moins courbées, afin de connaître l'influence particulière de chacun des trois élémens ci-dessus, sur la formule

$$V=L(nD^2+n'Dd+n''d^2)^2 ;$$

voici le résultat de ces expériences.

1.° Quand $\frac{D-d}{L}$ est très-petit, les règles trapézoïdales, quelle que soit leur épaisseur, donnent le même résultat qu'une lame mince à ressort parfait.

2.° Quand $\frac{G}{L}$ excède $\frac{6}{1000}$, le coefficient n, et par conséquent la capacité, diminuent d'autant plus que $\frac{D-d}{L}$ augmente.

3.° n où la capacité augmente à proportion que $\frac{d}{D}$ est plus petit, quel que soit d'ailleurs le degré de courbure $\frac{D-d}{L}$; cette loi est conforme à la théorie.

4.° Quand $\frac{G}{L}=\frac{20}{1000}$ et $\frac{D-d}{L}=\frac{1}{5}$, la plupart des règles, si le bois est sec, se rompent.

87. Il suit, de ce qui précède, que quand $\frac{G}{L}$ excède 0,006, la table de capacité du n.° 82 n'est plus exactement conforme à l'expérience. J'ai calculé la suivante pour les cas où l'on aspirerait à une plus grande précision ; sa formation et son usage sont les mêmes que pour celle du n.° 82 ; mais, elle est subdivisée en quatre parties correspondantes à quatre épaisseurs différentes de la douve : ainsi, pour un tonneau pour lequel $\frac{G}{L}$ vaudrait 0,026, on emploirait la troisième table ayant pour titre $\frac{G}{L}=0,024$; qui se

rapproche le plus de l'épaisseur 0,026 du tonneau proposé : pour plus de précision encore, il faudrait faire des intercalations.

Epaisseur de la douve $\frac{G}{L}$ = 0,006				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3821 2185 1848	3828 2184 1842	3843 2181 1830	3861 2176 1817
0,10	3821 2186 1847	3828 2185 1841	3843 2182 1829	3861 2177 1816
0,20	3822 2188 1844	3829 2187 1838	3844 2184 1826	3862 2179 1813
0,30	3826 2190 1838	3833 2189 1832	3848 2186 1820	3866 2181 1807

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}$ = 0,015				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3811 2189 1854	3818 2188 1848	3833 2185 1836	3851 2180 1823
0,10	3792 2198 1864	3799 2197 1858	3814 2194 1846	3832 2189 1833
0,20	3722 2228 1904	3729 2227 1898	3744 2224 1886	3762 2219 1873
0,30	3612 2277 1965	3619 2276 1959	3634 2273 1947	3652 2268 1934

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}$ = 0,024				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3795 2196 1863	3802 2195 1857	3817 2192 1845	3835 2187 1832
0,10	3739 2218 1897	3746 2217 1891	3761 2214 1879	3779 2209 1866
0,20	3548 2297 2009	3555 2296 2003	3570 2293 1991	3588 2288 1978
0,25	3409 2354 2091	3416 2353 2085	3431 2350 2073	3449 2345 2060

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}$ = 0,033				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3773 2205 1876	3780 2204 1870	3795 2201 1858	3813 2196 1845
0,10	3662 2246 1946	3669 2245 1940	3684 2242 1928	3702 2237 1915
0,15	3507 2312 2035	3514 2311 2029	3529 2308 2017	3547 2303 2004

Conclusion.

Conclusion.

88. Il résulte, de tout ce que nous avons dit, que le tonneau est trop irrégulier, et que sa forme dépend d'un trop grand nombre de causes physiques, pour qu'il soit possible de le soumettre à une théorie entièrement rigoureuse : voici ce qu'il y a de mieux à faire dans tous les cas.

1.° On obtiendra la plus grande approximation possible par la méthode du n.° 83, quand le besoin l'exigera.

2.° La table du n.° 87 fournira l'approximation la plus grande qu'on puisse obtenir, en ne mesurant que les quatre dimensions D, d, G, L.

3.° La table du n.° 82 donnera toute la précision qu'on peut avoir par les seuls élémens D, d, L.

4.° La formule qui convient le mieux à la pratique ordinaire, est celle qui tient le milieu entre celles de la table du n.° 87, et qui correspond aux rapports

$$\frac{G}{L}=0{,}018\ ,\quad \frac{D-d}{L}=0{,}1\ ,\quad \frac{d}{D}=0{,}85\ ;$$

elle est

$$V=L(0{,}3790D^2+0{,}2201Dd+0{,}1863d^2)\ ,$$

et diffère très-peu de la suivante, qui est un peu plus commode,

$$V=0{,}7754L(\tfrac{7}{11}D+\tfrac{4}{11}d)^2=0{,}006491L(7D+4d)^2\ . \qquad (10)$$

On peut éviter l'embarras de mesurer D, en prenant extérieurement, avec une règle, la valeur de $h=R-r$: alors la formule est

$$V=3{,}1416.L(r+0{,}64.h)^2 \qquad (11)$$

En mesurant extérieurement la circonférence C du bondon, et

celle c des fonds, et appelant g l'épaisseur de la douve, la formule serait

$$V=0,0006576L(7C+4c-69,11.g)^2 . \qquad (12)$$

Je dois prévenir que la formule de M. *Dez* est un peu plus faible, et celle de M. *Bazaine* un peu plus forte que les précédentes.

5.° Les logarithmes s'appliquent très-simplement aux formules précédentes, et elles n'exigent qu'une table des 1500 premiers nombres; toute l'opération se réduit à l'addition de trois logarithmes dont un est toujours le même; il n'est point de jaugeurs qui ne puissent pratiquer ce petit calcul : il me semble que ce procédé est bien préférable à l'emploi des jauges qui ne tiennent aucun compte des fractions, et qui reposent toutes sur des principes plus ou moins erronés.

ADDITIONS.

Sur le N.° 20.

QUAND on a quelques valeurs approchées $x_1=l$, $x_2=l_1+l_2$; $x_3=l_1+l_2+l_3$ .... de la racine cherchée x, on peut en obtenir une nouvelle encore plus approchée, par une méthode que j'ai déduite de celle qu'a donnée *Lagrange* (*Séances de l'école normale*, tom. 4, pag. 420), pour calculer la courbe des erreurs, et interpoler des termes dans une série d'observations.

Soient $X=0$ l'équation à résoudre, $X=y$ la courbe parabolique en x et y; y_1, y_2, y_3, y_4...... les valeurs de y que l'on obtient en mettant x_1, x_2, x_3, x_4,....... dans X : il s'agit de trouver pour x la valeur correspondante à $y=0$; c'est-à-dire, la supposition pour x qui rend nulle l'erreur y : cette valeur cherchée de x sera donnée par la formule

$$x = Ax_1+Bx_2+Cx_3+Dx_4 \ldots\ldots\ldots$$

dans laquelle on a fait

$$A=\frac{y_2y_3y_4}{(y_2-y_1)(y_3-y_1)(y_4-y_1)}, \quad B=\frac{y_1y_3y_4}{(y_1-y_2)(y_3-y_2)(y_4-y_2)},$$

$$C=\frac{y_1y_2y_4}{(y_1-y_3)(y_2-y_3)(y_4-y_3)}, \quad D=\frac{y_1y_2y_3}{(y_1-y_4)(y_2-y_4)(y_3-y_4)},$$

en observant que chaque fraction a autant de facteurs moins un, qu'il y a d'observations x_1, x_2, x_3, x_4.......

Si l'on applique la formule précédente à l'exemple du n.° 22, on trouve $x=0{,}5849$; la vraie valeur est $x=5857$.

Au reste, la méthode précédente, quoique curieuse et piquante, le cède néanmoins, pour la brièveté et la sureté, à celle des n.ºs 10 et 21. On peut remarquer, en passant, que la formule qu'a donnée M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 286) pour intégrer par approximation Xdx, est exactement la même que celle de M. *Lagrange*, citée plus haut.

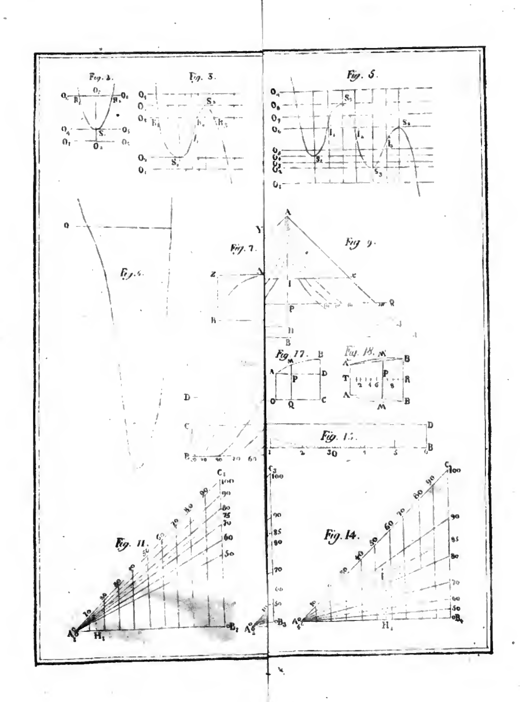
Sur le N.° 25.

J'ai dit, dans ce numéro, qu'avant de se livrer à la recherche des racines, il était utile de connaître le nombre des imaginaires : ainsi, dans l'exemple du n.° 22, si l'on avait su d'avance que la proposée avait deux racines imaginaires, on en aurait conclu que le couple des 2.mes et 3.mes racines ne pouvait être réel, puisque la première l'était.

Sur le Chapitre VI.

Je n'ai point parlé dans ce chapitre de la manière de déterminer les quantités réelles a, c qui entrent dans les racines imaginaires $a \pm c\sqrt{-1}$; on a pour cela diverses méthodes qui reviennent toutes à chercher les racines réelles d'une équation : on les trouve dans tous les livres, et je n'ai rien à ajouter sur cette matière.

N. B. En sollicitant l'indulgence du public en faveur de ma cécité, qu'il me soit permis d'acquitter une dette sacrée, celle de la reconnaissance paternelle envers ma fille *Rosine*, âgée de 17 ans, qui, renonçant aux amusemens de son âge, a eu l'héroïque patience de faire tous les calculs de cet ouvrage : puisse ce monument de la piété filiale lui mériter l'estime publique.


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 11.
Fig. 14.




BIBLIOTECA